追加問題解答例「ベクトル ①」

1. OA $=5$，OB $=10$ の △OAB がある．また，点 A を出発し，辺 OA 上を 1 秒あたり 1 進む点を P とし，点 O を出発し，辺 OB を 1 秒あたり 2 進む点を Q とする．P および Q が同時に出発してから t 秒後の P，Q を考える．ただし，$0<t<5$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ および t を用いて表せ．

(2) 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+p\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表される．ただし，$0<p<1$，$0<q<1$ である．このとき，p，q を t を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および t を用いて表せ．

(3) 線分 OR の延長が辺 AB と交わる点を S とする．点 S が辺 AB を 3 : 2 に内分するときの t の値を求めよ．

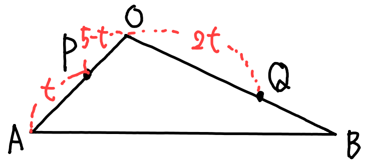
〔解答例〕

(1) OA $=5$，OB $=10$

t 秒後は AP $=t$，OP $=5-t$，OQ $=2t$ $(0<t<5)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OB}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{5-t}{5}\vec{a}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{t}{5}\vec{b}}$



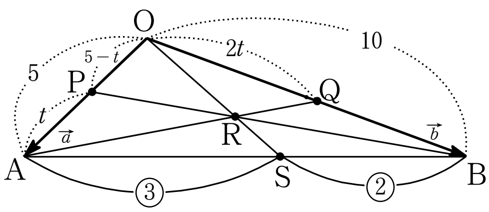
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+p\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{(5-t)p}{5}\vec{a}+(1-p)\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-q)\vec{a}+\dfrac{tq}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて2通りで表した

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は一次独立 $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b})$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{(5-t)p}{5}=1-q & \cdots ① \\[2mm] 1-p=\dfrac{tq}{5} & \cdots ② \end{cases}$$



連立して $\boldsymbol{p=\dfrac{5(5-t)}{t^2-5t+25}}$，$\boldsymbol{q=\dfrac{5t}{t^2-5t+25}}$

②$\times\frac{5}{t}$ $\quad \dfrac{5(1-p)}{t}=q \cdots ②'$

①+②'より $\quad \dfrac{(5-t)p}{5}+\dfrac{5(1-p)}{t}=1 \quad \times 5t$

$t(5-t)p+25(1-p)=5t$

$(t^2-5t+25)p=25-5t$

$\therefore\ p=\dfrac{5(5-t)}{t^2-5t+25}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\dfrac{(5-t)^2}{t^2-5t+25}\vec{a}+\dfrac{t^2}{t^2-5t+25}\vec{b}}$

(3) AS : SB $=3:2$ より $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ であるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

すなわち $\dfrac{(5-t)^2}{t^2-5t+25}\vec{a}+\dfrac{t^2}{t^2-5t+25}\vec{b}=\dfrac{2}{5}k\vec{a}+\dfrac{3}{5}k\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は一次独立 $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{a}\not\parallel\vec{b})$ であるから

$$\begin{cases}\dfrac{(5-t)^2}{t^2-5t+25}=\dfrac{2}{5}k \\[2mm] \dfrac{t^2}{t^2-5t+25}=\dfrac{3}{5}k \end{cases}$$

補 $(5-t)^2:t^2=2:3$ より $3(5-t)^2=2t^2$

連立して k を消去すると $t^2-30t+75=0$ となり $t=15\pm5\sqrt{6}$

よって $0<t<5$ であるから $\boldsymbol{t=15-5\sqrt{6}}$

〔別解例〕（チェバの定理を用いる）

（3）　チェバの定理から $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AS}}{\mathrm{SB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1$

すなわち $\dfrac{5-t}{t}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{10-2t}{2t}=1$

これより $t^2-30t+75=0$ となり $t=15\pm5\sqrt{6}$

よって $0<t<5$ であるから $\boldsymbol{t=15-5\sqrt{6}}$

2.　△ABC の内部に点 P があり $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

（2）　直線 AP と線分 BC の交点を D とするとき，線分比 AP : PD，BD : DC をそれぞれ求めよ．

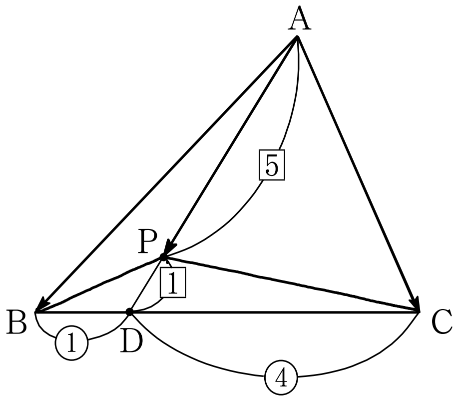
（3）　面積比 △PAB : △PBC : △PCA を求めよ．

〔解答例〕

（1）　始点を A として

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$



（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$

これより

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{1+4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって **AP : PD = 5 : 1，BD : DC = 1 : 4**

（3）　△ABC の面積を S とすると

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{6}\triangle\mathrm{ABD}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{6}S$$

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{1}{6}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{5}{6}\triangle\mathrm{ACD}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}S=\frac{4}{6}S$$

よって，面積比 △PAB : △PBC : △PCA = **1 : 1 : 4**

おまけ