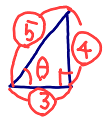
追加問題解答例「三角関数 ②」

1.　θ は鋭角で　$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ をみたす．このとき，次の値を求めよ．

（1）　$\sin 2\theta$　　（2）　$\cos 2\theta$　　（3）　$\tan 2\theta$　　（4）　$\sin 3\theta$

（5）　$\cos 3\theta$　　（6）　$\sin\dfrac{\theta}{2}$　　（7）　$\cos\dfrac{\theta}{2}$　　（8）　$\cos 4\theta$

〔 解答例 〕



$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

（1）　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\mathbf{\dfrac{24}{25}}$

（2）　$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=-\mathbf{\dfrac{7}{25}}$　← $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$ $=1-2\sin^2\theta$ でもよい

（3）　$\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\mathbf{\dfrac{24}{7}}$

（4）　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot\dfrac{4}{5}-4\left(\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{300-256}{125}=\mathbf{\dfrac{44}{125}}$

（5）　$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\left(\dfrac{3}{5}\right)^3-3\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{108-225}{125}=-\mathbf{\dfrac{117}{125}}$

（6）　$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$

　$\dfrac{\theta}{2}$ は鋭角より　$\cos\dfrac{\theta}{2}>0$　であるから　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

（7）　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$

　$\dfrac{\theta}{2}$ は鋭角より　$\sin\dfrac{\theta}{2}>0$　であるから　$\sin\dfrac{\theta}{2}=\mathbf{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

（8）　$\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2\left(-\dfrac{7}{25}\right)^2-1=\dfrac{98-625}{625}=-\mathbf{\dfrac{527}{625}}$

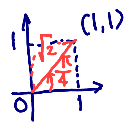
2.　x の関数

$$f(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x+1\ (0\leqq x\leqq\pi)$$

の最大値と最小値をそれぞれ求めよ．

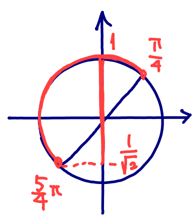
〔 解答例 〕

← $\sin x$ と $\cos x$ の和を t とおくと
積も t で表せる



　$t=\sin x+\cos x$　……①

とおくと ① を合成して　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$



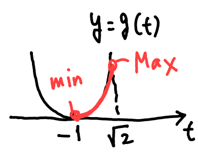
$0\leqq x\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ であるから　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

これより　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

① の両辺 2 乗して　$t^2=1+2\sin x\cos x$　すなわち　$\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

$g(t)=f(x)\ (-1\leqq t\leqq\sqrt{2}\,)$ とおくと　← t の2次関数

$$g(t)=t+\frac{t^2-1}{2}+1=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2$$



よって　$t=\sqrt{2}$ のとき　最大値 $\mathbf{\sqrt{2}+\dfrac{3}{2}}$

　　　$t=-1$ のとき　最小値 **0**

3.　O を原点とする座標平面上に点 A$(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件 (a)，(b) を満たす 2 点 B，C を考える．

（a）　B は $y > 0$ の部分にあり，$\mathrm{OB} = 2$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ - \theta$ である．

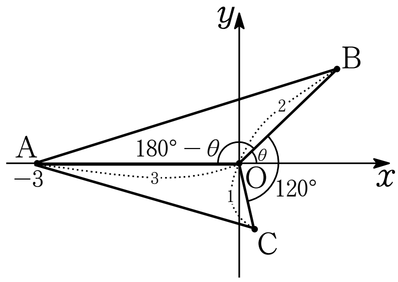
（b）　C は $y < 0$ の部分にあり，$\mathrm{OC} = 1$ かつ $\angle\mathrm{BOC} = 120^\circ$ である．

ただし，△ABC は O を含むものとする．

(1)　△OAB と △OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ．

(2)　θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，△OAB と △OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

〔 解答例 〕



(1)　$\mathrm{OA} = 3$

$\angle\mathrm{AOC} = 360^\circ - \{(180^\circ - \theta) + 120^\circ\} = \theta + 60^\circ$

△OAB，△OAC の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta = 3\sin\theta$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\sin(\theta + 60^\circ) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot(\sin\theta\cos 60^\circ + \cos\theta\sin 60^\circ)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sin\theta\cdot\frac{1}{2} + \cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

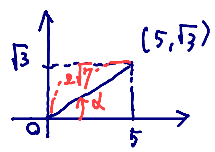
$S_1 = S_2$　のとき　$3\sin\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$　であり　$\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$

$\theta = 90^\circ$　とすると　$\sqrt{3} = 0$　より不適なので　$\theta \neq 90^\circ$

これより　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　すなわち　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

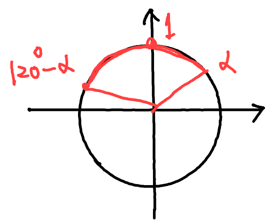
合成　$2\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha)$



(2)　$S_1 + S_2 = \dfrac{3}{4}(5\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) = \dfrac{3\sqrt{7}}{2}\sin(\theta + \alpha)$

ただし　α は $0^\circ < \alpha < 90^\circ$　であり　$\cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14},\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$　をみたす．

$\alpha < \theta + \alpha < 120^\circ + \alpha$　であるから　$\sin(\theta + \alpha) \leqq 1$



よって　$\sin(\theta + \alpha) = 1$　のとき　$S_1 + S_2$ の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{2}}$

そのとき　$\theta + \alpha = 90^\circ$　すなわち　$\theta = 90^\circ - \alpha$　であるから

$$\boldsymbol{\sin\theta} = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{7}}{14}}$$