追加問題解答例「三角関数」

1. k を正の実数とし，2 次方程式 $8x^2-12kx+3k^2+8=0$ は $\sin\theta+2\cos\theta$，$2\sin\theta+\cos\theta$ を解にもつとする．ただし，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ k を用いて表せ．

(2) k の値を求めよ．

(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．

〔解答例〕

(1) 解と係数の関係を用いて

$$\begin{cases}(\sin\theta+2\cos\theta)+(2\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{3k}{2} & \cdots\cdots① \\ (\sin\theta+2\cos\theta)(2\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{3k^2+8}{8} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

解の和と積を係数で表す！

① より $\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta=\frac{k}{2}}$ ……③

② より $2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+5\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3k^2+8}{8}$

よって $\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3k^2-8}{40}}$ ……④

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+2\sin\theta\cos\theta$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ が成り立つので ③，④ を代入して

$$\frac{k^2}{4}=1+\frac{3k^2-8}{20} \quad すなわち \quad k^2=6$$

$k>0$ であるから $\boldsymbol{k=\sqrt{6}}$

(3) $k=\sqrt{6}$ より ③，④ は

上と同じ計算！

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2} & \cdots\cdots③' \\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4} & \cdots\cdots④'\end{cases}$$

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}-2\sin\theta\cos\theta$

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\frac{1}{4} \quad (\because ④')$$
$$=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より $\sin\theta\leqq\cos\theta$ であるから $\sin\theta-\cos\theta\leqq0$

これより $\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……⑤

← $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の差もわかる

$\dfrac{③'+⑤}{2}$ として $\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

③′と⑤から $\sin\theta$ と $\cos\theta$ もわかる

$\dfrac{③'-⑤}{2}$ として $\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

$(t-\sin\theta)(t-\cos\theta)=0$

$t^2-\underbrace{(\sin\theta+\cos\theta)}_{\frac{\sqrt{6}}{2}}t+\underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac{1}{4}}=0$

〔別解例〕($\sin\theta$，$\cos\theta$ が解となる 2 次方程式を作る)

(3) ③′，④′ より $\sin\theta$ と $\cos\theta$ が解となる 2 次方程式の 1 つは

$$t^2-\frac{\sqrt{6}}{2}t+\frac{1}{4}=0 \quad すなわち \quad 4t^2-2\sqrt{6}\,t+1=0 \quad \therefore t=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より $\sin\theta\leqq\cos\theta$

よって $\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

2.　関数 $y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1)　周期を求めよ．

(2)　y 切片を求めよ．

(3)　y の値の最大値 M と最小値 m をそれぞれ求めよ．

(4)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$y=M$ となる x の値を求めよ．

(5)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$y=m$ となる x の値を求めよ．

(6)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，x 軸との交点の x 座標を求めよ．

(7)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ におけるグラフを描け．

〔 考え方 〕

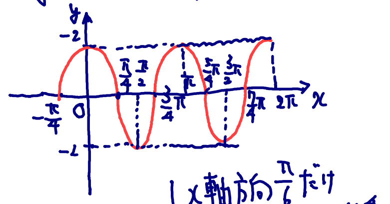
$y=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos 2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ について

$y=2\cos 2x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したグラフである．

なお　$y=2\cos 2x$　は　$\dfrac{y}{2}=\cos\dfrac{x}{\frac{1}{2}}$　については

$y=\cos x$ のグラフを x 軸方向 $\dfrac{1}{2}$ 倍，y 軸方向 2 倍したグラフである．

$y=2\cos 2x$ のグラフ



↓x軸方向 $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動

(7)

〔 解答例 〕

(1)　周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\boldsymbol{\pi}$

(2)　$x=0$ として　$y=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\mathbf{1}$

(3)　$-2 \leqq y \leqq 2$ で等号も成り立つので

　　$\boldsymbol{M=2,\ m=-2}$

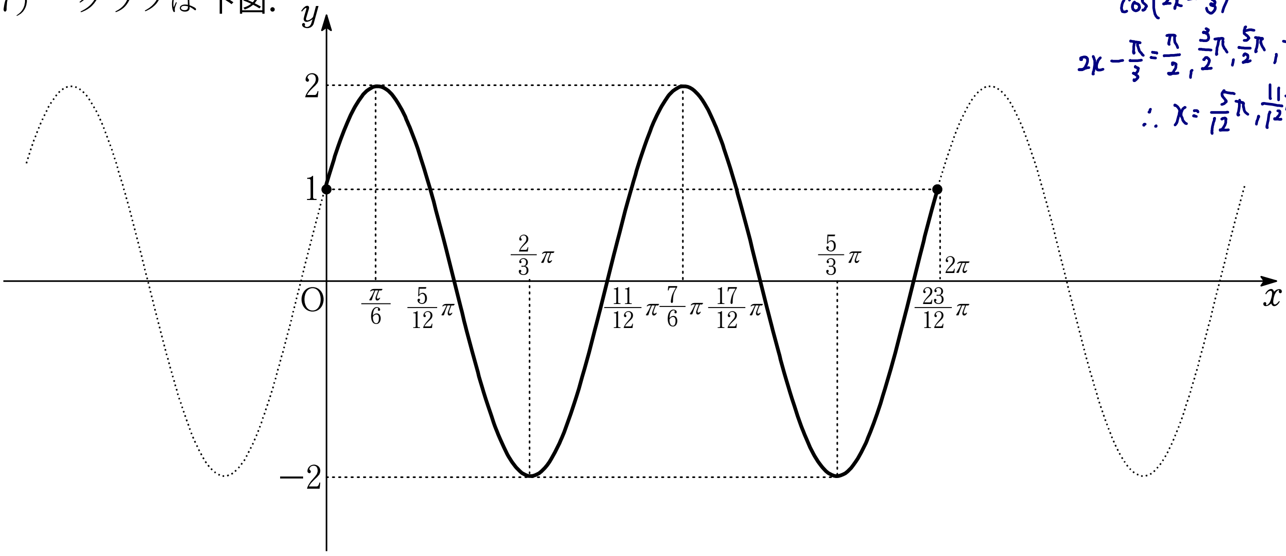
(4)　$y=M$ となる x は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi}$

(5)　$y=m$ となる x は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(6)　x 軸との交点の x 座標は　$\boldsymbol{\dfrac{5}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi,\ \dfrac{17}{12}\pi,\ \dfrac{23}{12}\pi}$

(7)　グラフは 下図．

(1)〜(6) は グラフからわかります！



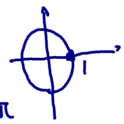
(4)〜(6) を式でやる場合

$0 \leqq x \leqq 2\pi$

より　$-\frac{\pi}{3} \leqq 2x-\frac{\pi}{3} \leqq \frac{11}{3}\pi$

(1)　$y=2$ とすると

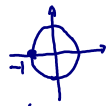
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$



$2x-\frac{\pi}{3}=0,\ 2\pi$　$\therefore x=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

(2)　$y=-2$ とすると

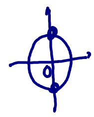
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$



$2x-\frac{\pi}{3}=\pi,\ 3\pi$　$\therefore x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

(3)　$y=0$ とすると

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$



$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

$\therefore x=\frac{5}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi,\ \frac{17}{12}\pi,\ \frac{23}{12}\pi$