追加問題解答例「三角比と図形 ②」

1.　点 O を中心とする半径 5 の円の内部の点 P を通る弦 AB について，PA・PB ＝ 21 であるとき，線分 OP の長さを求めよ．

〔解答例〕

OP ＝ x とおく．

直線 OP と円との 2 つの交点を C，D として，方べきの定理を用いて

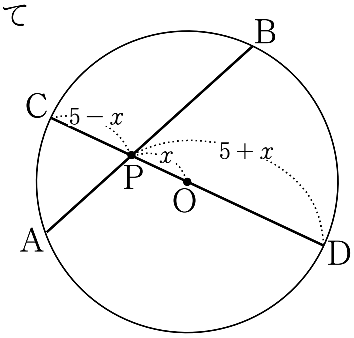
　　PA・PB ＝ PC・PD　より　$21 = (5 - x)(5 + x)$　$= 25 - x^2$

すなわち　$x^2 = 4$

$x > 0$ であるから　$x = 2$

よって　OP ＝ **2**

半径 5 なので
PC = 5−x
PD = 5+x



2.　平行四辺形 ABCD の辺 AB の中点を E とする．また，△BCD の重心を G とし，直線 DG と辺 BC との交点を F とする．EF ＝ 9 のとき，線分 AG の長さを求めよ．

〔解答例〕

△BCD の重心が G より直線 DG と辺 BC の交点 F は辺 BC の中点である．これと辺 AB の中点が E であることから中線連結定理より

　　AC ＝ 2EF ＝ 2・9 ＝ 18

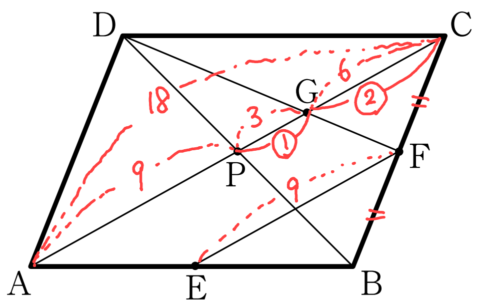
対角線 AC と BD はそれぞれの中点で交わるがそれを P とすると

　　$\mathrm{AP} = \mathrm{CP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot 18 = 9$

線分 CP は △BCD の中線より CG : PG ＝ 2 : 1 なので

　　$\mathrm{PG} = \dfrac{1}{3}\mathrm{CP} = \dfrac{1}{3} \cdot 9 = 3$　△BCDの重心はG

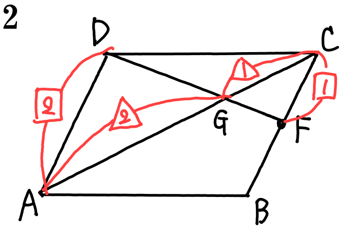
よって　AG ＝ AP ＋ PG ＝ 9 ＋ 3 ＝ **12**



〔別解例〕

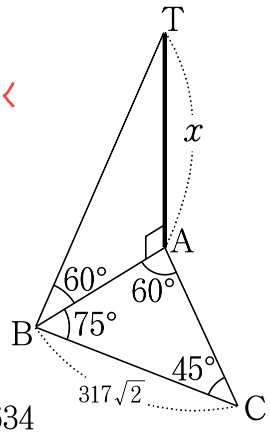
△GDA ∽ △GFC であり，相似比は AD : CF ＝ 2 : 1

よって，AG : CG ＝ 2 : 1　なので　$\mathrm{AG} = \dfrac{2}{3}\mathrm{AC} = \dfrac{2}{3} \cdot 18 = \mathbf{12}$



3.　平らな土地で地点 A に立つ塔の高さを測るため，2 つの地点 B，C から角度を測定したところ，$\angle ABC = 75°$，$\angle ACB = 45°$ であり，地点 B から塔の先端を見上げる角度は $60°$ であった．B，C 間の距離が $317\sqrt{2}$ m（約 448.3 m）とすると，塔の高さは $\boxed{}$ m である．

〔解答例〕



塔の先端を T として

　　塔の高さを $TA = x$ (m)　……☆　　← 求めたいものをxとおく

とおく．

$\angle BAT = 90°$，$\angle ABT = 60°$　より　$AB = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

△ABC の内角を考えて　$\angle BAC = 180° - (75° + 45°) = 60°$

△ABC に正弦定理を用いて

$$\frac{317\sqrt{2}}{\sin 60°} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sin 45°}\quad \text{すなわち}\quad x = 317\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 634$$

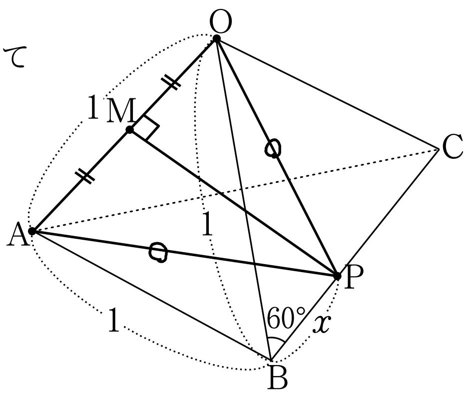
よって ☆ より塔の高さは **634** (m)　（この塔はスカイツリーでした）

4.　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする．

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ．

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ．

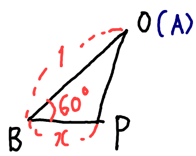
〔解答例〕



(1)　$OA = OB = AB = BC = CA = 1$

　$BP = x\ (0 \leqq x \leqq 1)$　として　△OBP に余弦定理を用いて

$$OP^2 = x^2 + 1^2 - 2\cdot x\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = x^2 - x + 1$$



　同様にして　$AP^2 = x^2 - x + 1$

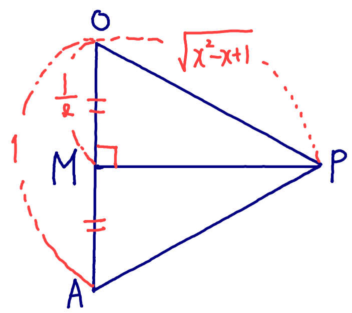
$$\therefore OP = AP = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

　OA の中点を M とすると PM⊥OA より

　△OMP に三平方の定理を用いて

$$PM = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{x^2 - x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}$$



　△OAP の面積を $S(x)$ として

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot PM = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}}$$

(2)　$S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$

　よって，面積 $S(x)$ の最小値は $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}\ \left(x = \dfrac{1}{2}\right)$　← 点Pが線分BCの中点のとき