数学Ⅲ　微分法

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

微分係数

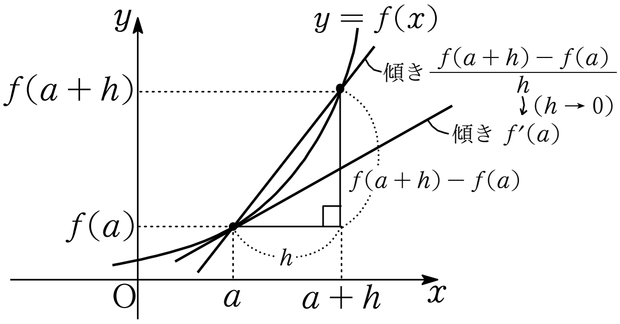
x の値が a から $a+h$ まで変わるときの

関数 $y=f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

h を限りなく 0 に近づけたとき



この平均変化率がある値に限りなく近づくならば，その極限値を

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における 微分係数（びぶんけいすう） といい $f'(a)$ で表す．

すなわち

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

㊎ $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{h\to\infty}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

Ⓖ 微分係数とグラフ

微分係数 Ⅱ

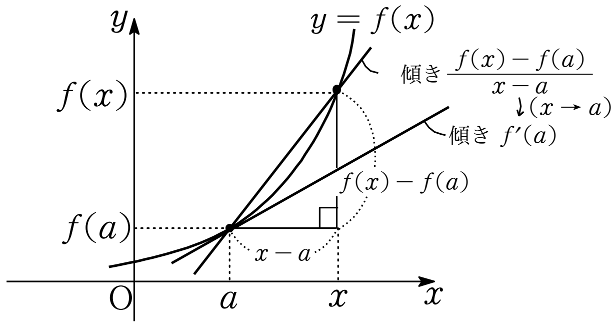
関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

において

$a+h=x$ とおくと $h=x-a$

$h\to 0$ と $x\to a$ は同じであることから



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

すなわち　$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

㊎ $f(x)=x^2$ について

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

微分可能

関数 $f(x)$ について，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在すること

すなわち $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ が存在することを

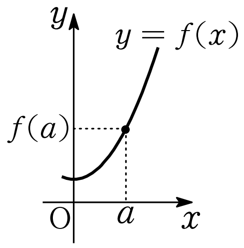
$f(x)$ は $x=a$ で **微分可能**（びぶんかのう）である という.

関数の連続

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a において

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ のとき

$f(x)$ は $x=a$ で **連続**（れんぞく）であるという.



微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f(x)$ は $x=a$ で連続 である.

㊫ $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f'(a)$ が存在して $\displaystyle f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)+f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)\right\}\\&=f'(a)\cdot0+f(a)=f(a)\end{aligned}$$

連続と微分可能

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても

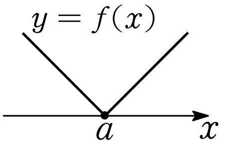
$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるとは限らない.

㊫ $f(x)=|x-a|$ を考えると $f(a)=0$ であり

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}|x-a|=0=f(a)$ であるから $f(x)$ は $x=a$ で連続である.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1 \quad \cdots\cdots①$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1 \quad \cdots\cdots②$$



① ≠ ② であるから $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は存在しない.

すなわち $f(x)$ は $x=a$ で連続であるが $x=a$ で微分可能ではない.

区間で微分可能

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての値 a で微分可能であるとき

$f(x)$ は **区間 I で微分可能である** という.

このとき $f(x)$ は区間 I で連続である.

導関数の定義

関数 $y=f(x)$ において

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を $f(x)$ の **導関数**(どうかんすう) という.

㊗補 $x=a$ とすると $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ となる.
これは $x=a$ における微分係数である.

導関数の増分

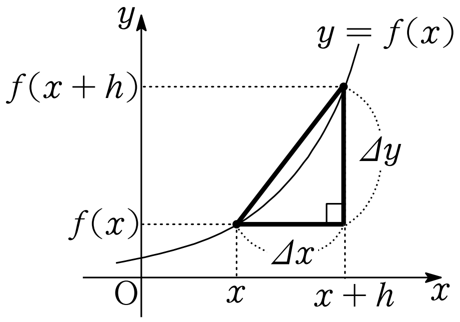
関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

h を x の増分(ぞうぶん)といい Δx と表す.

$f(x+h)-f(x)$ を y の増分(ぞうぶん) といい Δy と表す.

すなわち

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$



導関数の表記

$y=f(x)$ の導関数を表わす記号として

$$f'(x),\ \{f(x)\}',\ \big(f(x)\big)',\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

などが用いられる.

微分する

微分可能な x の関数 $f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを

$f(x)$ を x で 微分(びぶん)する という．

定数関数の微分

c を定数とすると　$(c)'=0$

㊂ $f(x)=c$ について

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

和・差・実数倍の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

1 $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

2 $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

3 k を実数とするとき $\{k\,f(x)\}'=k\,f'(x)$

1，2，3 をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\{s\,f(x)+t\,g(x)\}'=s\,f'(x)+t\,g'(x)$$

㊂ $F(x)=sf(x)+tg(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{sf(x+h)+tg(x+h)-\{sf(x)+tg(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{s\{f(x+h)-f(x)\}+t\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left\{s\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+t\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}\\
&=sf'(x)+tg'(x)
\end{aligned}$$

㊎ 1 $(x^3+x^2)'=(x^3)'+(x^2)'=3x^2+2x$

2 $(x^3-x^2)'=(x^3)'-(x^2)'=3x^2-2x$

3 $(3x^2)'=3(x^2)'=3\cdot 2x=6x$

$(4x^3+3x^2)'=4(x^3)'+3(x^2)'=4\cdot 3x^2+3\cdot 2x=12x^2+6x$

積の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

㊟ $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g'(x)$ とするのは間違い.

㊢ $F(x) = f(x)g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

商の微分

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$\boxed{1}$ $$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\boxed{2}$ $$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

考 $\boxed{1}$ $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x) - f(x) \cdot \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

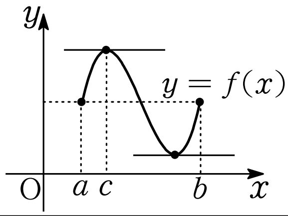
$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で $f(x) = 1$ として $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = \dfrac{0 \cdot g(x) - 1 \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

ロルの定理

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとして

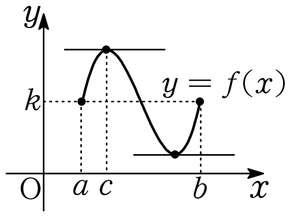
$f(a)=f(b)$ ならば

$f'(c)=0$ を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する.



㊫ 直観的には $y=f(x)$ グラフに $a<x<b$ の区間で傾き 0 の接線がひける.

㊔ $f(a)=f(b)=k$ とおく.



$f(x)$ が定数ならば明らか.

$f(x)$ が定数ではないならば

$f(x)>k$ または $f(x)<k$ となる x が存在する.

$f(x)>k$ となる x が存在する場合は

最大値の原理より $a\leqq x\leqq b$ の区間に最大値が存在するので, それを $f(c)\ (a<c<b)$ とおく.

このとき $a<x<b$ で常に $f(c)\geqq f(x)$ すなわち $f(x)-f(c)\leqq 0$ が成り立つ.

(あ) $a\leqq x<c$ のとき

$x-c<0$ なので $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqq 0$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$ であるから $f'(c)\geqq 0$ ……①

(い) $c<x\leqq b$ のとき

$x-c>0$ なので $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqq 0$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(c)$ であるから $f'(c)\leqq 0$ ……②

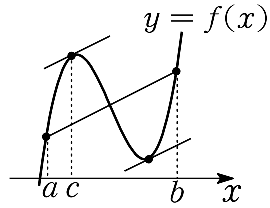
① かつ ② より $f'(c)=0$

$f(x)<k$ となる x が存在する場合も同様に示せる.

平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\,b]$ で連続，開区間 $(a,\,b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



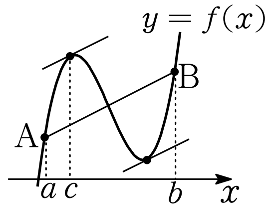
を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

補 直観的にはグラフにおいて $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{A}\big(a,\,f(a)\big)$，$\mathrm{B}\big(b,\,f(b)\big)$ を通る直線 AB の傾きと同じ傾きの接線が $a<x<b$ の区間でひける．

考 $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

とおくと

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$g(a)=0$，$g(b)=0$ であるから $g(a)=g(b)$

ロルの定理を用いて $g'(c)=0$ すなわち $f'(c)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

要

平均値の定理は a と b の大小関係がよくわからずに使うことも多いので

次のように用いることもよくある．

関数 $f(x)$ が微分可能ならば

$$\big|f(b)-f(a)\big|=\big|f'(c)(b-a)\big|$$

となる c が a と b の間に存在する．

ただし $a=b$ ならば $a=c=b$

平均値の定理 Ⅱ

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\,b]$ で連続，開区間 $(a,\,b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$$

すなわち

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

を満たす $0<\theta<1$ となる実数 θ が存在する．

考 平均値の定理 で $b-a=h$，$\dfrac{c-a}{b-a}=\theta$ とおくと $0<\theta<1$，$b=a+h$，$c=a+\theta h$

合成関数の微分法

関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続，関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

㊢ 平均値の定理より

$$f(g(x+h)) - f(g(x)) = \{g(x+h)-g(x)\}f'(c) \quad \cdots\cdots ①$$

となる c が $g(x)$ と $g(x+h)$ の間に存在する．

ただし $g(x)=g(x+h)$ ならば $g(x)=g(x+h)=c$ である．

$g(x)$ は微分可能なので連続であるから $\displaystyle\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{h\to 0} c = g(x)$

$f'(x)$ は連続なので $f'(c) = f'(g(x)) \quad \cdots\cdots ②$

$F(x)=f(g(x))$ とおくと

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f'(c)\right\} \ (\because ①) \\ &= f'(g(x))\cdot g'(x) \ (\because ②) \end{aligned}$$

㊫ 定義域内のすべての x で $g'(x) \fallingdotseq 0$ とするならば次のようにも示せる．

平均値の定理より

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(c) \quad \text{すなわち} \quad g(x+h) = g(x)+g'(c)h \quad \cdots\cdots ③$$

となる c が x と $x+h$ の間に存在する．

このとき $h\to 0$ とすると $c\to x$

$F(x)=f(g(x))$ とおくと

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(g(x)+g'(c)h)-f(g(x))}{g'(c)h}\cdot g'(c)\right\} \ (\because ③,\ g'(c)\fallingdotseq 0) \\ &= f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

㊫ $y=f(g(x))$ において $u=g(x)$ とおくと $y=f(u)$ となることから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f'(u)\cdot g'(x)$$

㊫ $f'(x)$ の連続は言えなくても一般に合成関数の微分法は成り立つ．

合成関数の微分法

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

逆関数の微分法

関数 $f(x)$ の逆関数 $g(x)$ が存在し，$g(x)$ が微分可能であるとする．

$y=f(x)$ を x について解いて $x=g(y)$

$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$，$\dfrac{dx}{dy}=g'(x)$ と表わすと $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$

すなわち $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

㊂右図のような $y=f(x)$，$x=g(y)$ を考える．

$y+k=f(x+h)$，$x+h=g(y+k)$

$\mathrm{P}\big(x,\ f(x)\big)$，$\mathrm{Q}\big(x+h,\ f(x+h)\big)$

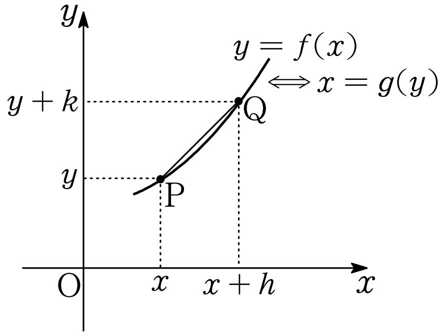
または $\mathrm{P}\big(g(y),\ y\big)$，$\mathrm{Q}\big(g(y+k),\ y+k\big)$

直線 PQ の傾きを 2 通りで表して

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k}{g(y+k)-g(y)}$$

すなわち $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{\dfrac{g(y+k)-g(y)}{k}}$

$h\to 0$ とすると $k\to 0$ であるから $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$



㊇ $y=f(x)$ を x で微分して $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ ……①

$x=g(y)$ を x で微分して $1=g'(y)\dfrac{dy}{dx}$

$=g'(y)f'(x)$（∵ ①）

よって $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$

㊀ $y=x^{\frac{1}{3}}$ を x で微分する．

$x=y^3$ より $\dfrac{dx}{dy}=3y^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3\big(x^{\frac{1}{3}}\big)^2}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\ (x\neq 0)$$

x^p（p は有理数）の導関数

p が有理数のとき

$$(x^p)' = p\,x^{p-1}$$

㊕ p は有理数なので $p = \dfrac{m}{n}$（m, n は整数，$n \geqq 1$）とおける．

$y = x^p = x^{\frac{m}{n}}$ とすると $y^n = x^m$

両辺を x で微分して $ny^{n-1}\dfrac{dy}{dx} = mx^{m-1}$

すなわち $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \dfrac{mx^{m-1}}{n(x^{\frac{m}{n}})^{n-1}} = \dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{x^{m-1}}{x^{1-\frac{m}{n}}} = \dfrac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$

よって $\dfrac{m}{n} = p$ より $\dfrac{dy}{dx} = px^{p-1}$

㊗ p が 0 以上の整数のときは数学 Ⅱ で学習済

p が実数のときも成り立つがあとでまた書く．

㊗ 教科書では逆関数の微分を使って示しているが，それだと逆関数の存在を考えて $x>0$ としているが，実際は p によって，定義域が違うので注意したい．下に確認で書いておく．

関数 $x^{\frac{m}{n}}$ の定義域

関数 $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$（$m$，$n$ は互いに素な整数，$m \neq 0$，$n \geqq 1$）

の定義域について

$\boxed{1}$ n が奇数のとき

$m>0$ ならば $f(x)$ の定義域は 実数全体

$m<0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x \neq 0$

$\boxed{2}$ n が偶数のとき

$m>0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

$m<0$ ならば $f(x)$ の定義域は $x>0$

㊟ $m=0$ ならば $f(x) = x^0 = 1$ と定数関数．

㊗ $\boxed{2}$ で m が偶数のとき，m，n は互いに素だから n は奇数になる．

㊫ $\boxed{1}$ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ の定義域は実数全体

$f(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ の定義域は $x \neq 0$

$\boxed{2}$ $f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ の定義域は $x \geqq 0$

$f(x) = x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ の定義域は $x>0$

x^p (p は有理数) の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能，p が有理数とするとき

$$\left\{\left(g(x)\right)^p\right\}' = p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$$

㊫ $f(x) = x^p$ とおくと $f'(x) = px^{p-1}$

$$\left\{(g(x))^p\right\}' = \left\{f\left(g(x)\right)\right\}' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) = p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$$

㊫ $\left\{(x^2+1)^3\right\}' = 3(x^2+1)^2\cdot(x^2+1)' = 3(x^2+1)^2\cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$

㊢

$f(x)$ が微分できるなら 合成関数 $f\left(g(x)\right)$ も微分できる.

x で微分した導関数の x を $g(x)$ にして $g'(x)$ をかければよい.

例をあげると

x^p を x で微分すると px^{p-1}

$\left\{\left(g(x)\right)^p\right\}'$ を x で微分すると $p\left\{g(x)\right\}^{p-1}g'(x)$

ちなみに $g(x) = x$ としても成り立つ.

他の微分も同じようにできる.

導関数の準公式

$\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

考 $\boxed{1}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ $\left(\because \boxed{x^p \text{ の導関数}} \text{で } p=-1\right)$

$\boxed{2}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\because \boxed{x^p \text{ の導関数}} \text{で } p=\dfrac{1}{2}\right)$

導関数の合成関数の準公式

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$\boxed{2}$ $\left\{\sqrt{g(x)}\right\}' = \dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とおくと $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \sqrt{x}$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left\{\sqrt{g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

例 $\boxed{1}$ $\left\{\dfrac{1}{x^2+1}\right\}' = -\dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{2}$ $\{\sqrt{x^2+1}\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

三角関数の導関数

$\boxed{1}$ $(\sin x)' = \cos x$

$\boxed{2}$ $(\cos x)' = -\sin x$

$\boxed{3}$ $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{4}$ $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \sin x$ として

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \right\} \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \cos x$ として

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \right\} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ として $\boxed{\text{商の微分}}$ と $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ より

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ として $\boxed{\text{商の微分}}$ と $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ より

$$f'(x) = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

三角関数の合成関数と導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

1. $\{\sin g(x)\}' = g'(x)\cos g(x)$
2. $\{\cos g(x)\}' = -g'(x)\sin g(x)$
3. $\{\tan g(x)\}' = \dfrac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$
4. $\left\{\dfrac{1}{\tan g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$

考

1. $f(x) = \sin x$ とおくと $f'(x) = \cos x$
   $\{\sin g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = g'(x)\cos g(x)$
2. $f(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = -\sin x$
   $\{\cos g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = -g'(x)\sin g(x)$
3. $f(x) = \tan x$ とおくと $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
   $\{\tan g(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = \dfrac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ とおくと $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
   $\left\{\dfrac{1}{\tan g(x)}\right\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))\cdot g'(x) = -\dfrac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$

例

1. $\{\sin(x^2+1)\}' = (x^2+1)'\cos(x^2+1) = 2x\cos(x^2+1)$
2. $\{\cos(x^2+1)\}' = -(x^2+1)'\sin(x^2+1) = -2x\sin(x^2+1)$
3. $\{\tan(x^2+1)\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{\cos^2(x^2+1)} = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$
4. $\left\{\dfrac{1}{\tan g(x)}\right\}' = -\dfrac{(x^2+1)'}{\sin^2(x^2+1)} = -\dfrac{2x}{\sin^2(x^2+1)}$

自然対数の底

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ここで e は無理数で $e=2.718281828459045\cdots$ と知られている.

底が e である対数 $\log x=\log_e x$ を 自然対数（しぜんたいすう） という.

㊟ 数学 Ⅲ では $\log x$ は底が e とし，e を自然対数の底という.

㊜ これは厳密には定理になるが，高校数学では定義にしている.

㊢ 底が e の対数を $\log x$ と表すが，$\ln x$ と表すこともある.

対数の極限

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

㊫ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

対数関数の導関数

$\boxed{1}$ $\displaystyle\left(\log x\right)'=\frac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x\log a}\quad(0<a<1,\ 1<a)$

定義域は $x>0$

㊫ $\boxed{1}$ $f(x)=\log x$ として

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\right\}=\frac{1}{x}$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle f(x)=\log_a x=\frac{\log x}{\log a}$ として

$$f'(x)=\frac{1}{\log a}(\log x)'=\frac{1}{x\log a}$$

対数関数の合成関数と導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

$\boxed{1}$ $\left\{\log g(x)\right\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

$\boxed{2}$ $\left\{\log_a g(x)\right\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\log a}$　$(0 < a < 1,\ 1 < a)$

定義域は $g(x) > 0$ を満たす x の範囲

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \log x$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\left\{\log g(x)\right\}' = \left\{f\big(g(x)\big)\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$\boxed{2}$ $f(x) = \log_a x$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{1}{x\log a}$

$$\left\{\log_a g(x)\right\}' = \left\{f\big(g(x)\big)\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\log a}$$

例 $\boxed{1}$ $\left\{\log(x^2+1)\right\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\boxed{2}$ $\left\{\log_a(x^2+1)\right\}' = \dfrac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\log a} = \dfrac{2x}{(x^2+1)\log a}$

定義域を広げた対数関数の導関数

$\boxed{1}$ $\big(\log|x|\big)' = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $\big(\log_a|x|\big)' = \dfrac{1}{x\log a}$　$(0 < a < 1,\ 1 < a)$

定義域は $x \neq 0$

考 $\boxed{1}$ $f(x) = \log|x| = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log(-x) & (x < 0) \end{cases}$

あ $x > 0$ のとき　$f(x) = \log x$ より　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

い $x < 0$ のとき　$f(x) = \log(-x)$

合成関数の微分法より　$f'(x) = \dfrac{(-x)'}{-x} = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ $f(x) = \log_a|x| = \dfrac{\log|x|}{\log a}$ として

$$f'(x) = \frac{1}{\log a}\big(\log|x|\big)' = \frac{1}{x\log a}$$

定義域を広げた対数関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

1 $\left\{\log|g(x)|\right\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

2 $\left\{\log_a|g(x)|\right\}' = \dfrac{g'(x)}{g(x)\log a}$ $(0<a<1,\ 1<a)$

定義域は $g(x) \fallingdotseq 0$ を満たす x の範囲

㊔ 1 $f(x)=\log|x|$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\left\{\log|g(x)|\right\}' = \left\{f\big(g(x)\big)\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

2 $f(x)=\log_a|x|$ とおくと $f'(x)=\dfrac{1}{x\log a}$

$$\left\{\log_a|g(x)|\right\}' = \left\{f\big(g(x)\big)\right\}' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\log a}$$

㊝ 1 $\left\{\log|x^2-1|\right\}' = \dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1} = \dfrac{2x}{x^2-1}$ $(x \fallingdotseq \pm 1)$

2 $\left\{\log_a|x^2-1|\right\}' = \dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\log a} = \dfrac{2x}{(x^2-1)\log a}$ $(x \fallingdotseq \pm 1)$

指数関数の導関数

[1] $(e^x)' = e^x$

[2] $(a^x)' = a^x \log a \quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$

㊁ [1] $y = e^x$ とおくと $x = \log y$

両辺を y で微分して $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = y = e^x$

㊀別 $f(x) = e^x$ として

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}\right) \\ &= e^x \end{aligned}$$

[2] $y = a^x$ とおくと $x = \log_a y$

両辺を y で微分して $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y \log a}$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = y \log a = a^x \log a$

㊉補 [2] で $a = e$ とすると [1] になる.

指数関数の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能とするとき

[1] $\left\{e^{g(x)}\right\}' = g'(x)e^{g(x)}$

[2] $\left\{a^{g(x)}\right\}' = g'(x)a^{g(x)} \log a \quad (0 < a < 1,\ 1 < a)$

㊁考 [1] $f(x) = e^x$ とおくと $f'(x) = e^x$

$\left\{e^{g(x)}\right\}' = \left\{f(g(x))\right\}' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = g'(x)e^{g(x)}$

[2] $f(x) = a^x$ とおくと $f'(x) = a^x \log a$

$\left\{a^{g(x)}\right\}' = \left\{f(g(x))\right\}' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = g'(x) \log a e^{g(x)}$

㊀例 [1] $(e^{x^2+1})' = (x^2+1)'e^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}$

[2] $(3^{x^2+1})' = (x^2+1)'3^{x^2+1} \log 3 = 2x \cdot 3^{x^2+1} \cdot \log 3$

対数微分法

関数 $f(x)$ は微分可能とする．

このとき $y=f(x)$ の導関数を求めるのに次のような手順がある．

$\boxed{1}$ 両辺の絶対値をとり，さらに自然対数をとり $\log|y|=\log|f(x)|$

$\boxed{2}$ 両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y}=\{\log|f(x)|\}'$

$\boxed{3}$ $y=f(x)$ とし，y' について整理して $y'=f(x)\{\log|f(x)|\}'$

すなわち $y=f(x)$ の導関数は $f(x)\{\log|f(x)|\}'$

補 $\log|f(x)|$ の微分が $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 以外の形になるときに使える．

補 対数をとるので $f(x)\fallingdotseq 0$ とするが，導関数はこの限りではない．

別 $f(x)>0$ ならば $y=f(x)=e^{\log f(x)}$ として微分してもよい．

例 $y=x^x$ $(x>0)$ の導関数を求める．

$x>0$ において $x^x>0$, $y>0$

$\boxed{1}$ 両辺の自然対数をとり $\log y=\log x^x$

$$=x\log x$$

$\boxed{2}$ 両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$

$\boxed{3}$ $y'=x^x(\log x+1)$

別 $y=x^x=e^{\log x^x}=e^{x\log x}$ を x で微分する．

x^α (α は実数) の導関数

α が実数のとき

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

考 $\alpha=0$ のとき $x^0=1$ とする．つまり $(1)'=0$

$\alpha=1$ のとき $(x)'=1$

$x\fallingdotseq 0$ として $y=x^\alpha$ とおき，両辺の絶対値をとると $|y|=|x|^\alpha$

自然対数をとると $\log|y|=\alpha\log|x|$

両辺を x で微分して $\dfrac{y'}{y}=\alpha\cdot\dfrac{1}{x}$

すなわち $y'=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$

補 α が無理数のもとで $f(x)=x^\alpha$ とおくと $f(0)=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}h^{\alpha-1}=\begin{cases}0 & (\alpha>1)\\ \text{収束しない} & (\alpha<1)\end{cases}$$

$\alpha>1$ ならば $x=0$ で微分可能で $f'(0)=0$

すなわち $\alpha>1$ ならば $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ は $x=0$ でも成り立つ．

関数 x^{α}（α は無理数）の定義域

関数 $f(x)=x^{\alpha}$（α は無理数）の定義域について

1. $\alpha>0$ のとき

   $f(x)$ の定義域は $x \geqq 0$

2. $\alpha<0$ のとき

   $f(x)$ の定義域は $x>0$

例 1. $f(x)=x^{e}$ の定義域は $x \geqq 0$

2. $f(x)=x^{-e}=\dfrac{1}{x^{e}}$ の定義域は $x>0$

参 α が有理数のときは 関数 $x^{\frac{m}{n}}$ の定義域

x^{α}（α は実数）の合成関数の導関数

関数 $g(x)$ は微分可能，α が実数とするとき

$$\left\{\left(g(x)\right)^{\alpha}\right\}'=\alpha\left\{g(x)\right\}^{\alpha-1}g'(x)$$

考 $f(x)=x^{\alpha}$ とおくと $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

$$\left\{\left(g(x)\right)^{\alpha}\right\}'=\left\{f\left(g(x)\right)\right\}'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)=\alpha\left\{g(x)\right\}^{\alpha-1}g'(x)$$

例 $\left\{(x^{2}+1)^{e}\right\}'=e(x^{2}+1)^{e-1}\cdot(x^{2}+1)'=e(x^{2}+1)^{e-1}\cdot 2x=2ex(x^{2}+1)^{e-1}$

陰関数

2 変数 x，y の間に関係式 $F(x,\,y)=0$ があり，

ある点 $(x_0,\,y_0)$ の近くの $(x,\,y)$ だけを考えて

y が x の関数，あるいは x が y の関数になるようなものを含むとする．

このとき $F(x,\,y)=0$ を **陰関数**（いんかんすう）または **陰伏関数**（いんふくかんすう）という．

㊓ 陰関数は英語で「implicit function」

これに対し $y=f(x)$ は陽関数といい，英語で「explicit function」という．

英語では陰と陽の意味はなく，和訳したときのダジャレのようである．

㊡ $x^2+y^2-1=0$ はあるところで $y=\sqrt{1-x^2}$ や $y=-\sqrt{1-x^2}$ を含むので陰関数．

陰関数の微分法

陰関数 $F(x,\,y)=0$ を x で微分する場合，次のような微分を考える．

α を実数として

$$(y^\alpha)'=\alpha\,y^{\alpha-1}\cdot y'=\alpha\,y^{\alpha-1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

㋖ $y=g(x)$ とすると $\boxed{x^\alpha\ (\alpha \text{ は実数}) \text{ の合成関数の導関数}}$

㊡ $(y^2)=2yy'=2y\cdot\dfrac{dy}{dx}$

$(y^3)=3y^2y'=3y^2\cdot\dfrac{dy}{dx}$

㊡ $x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると $2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

よって $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}\ (y\fallingdotseq 0)$

これは $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\mp\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x\fallingdotseq\pm 1)$ と同じこと．

高次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき

$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の **第2次導関数** といい

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ y^{(2)},\ f^{(2)}(x)$$ などの記号で表す.

これに対して $f'(x)$ を $f(x)$ の **第1次導関数** という.

また **第2次導関数** $f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の **第3次導関数** といい

$$y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^3}{dx^3}f(x),\ y^{(3)},\ f^{(3)}(x)$$ などの記号で表す.

一般に 自然数 n に対して

関数 $y=f(x)$ を n 回微分することによって得られる関数を

$f(x)$ の **第 n 次導関数** といい

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$ などの記号で表す.

㊓ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ は略式記号で，正式には $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

㊞ $y=\sin x$ とすると

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4}=\sin x$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

媒介変数表示で表された関数の微分法

座標平面の媒介変数 t で表された曲線

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

について

第 1 次導関数は $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

第 2 次導関数は $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$

㊫ $z = \dfrac{dy}{dx}$ とおくと

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

㋾ $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ について $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t,\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{1}{\tan t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}$$

接線の傾き

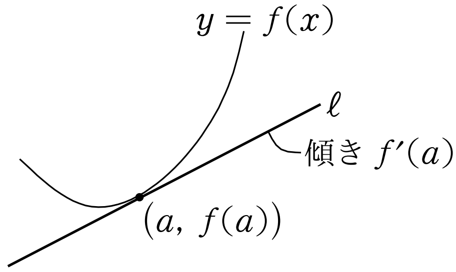
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の傾き は $f'(a)$ に等しい.

つまり

(接線の傾き)=(導関数に接点の座標を代入した値)



接線の方程式

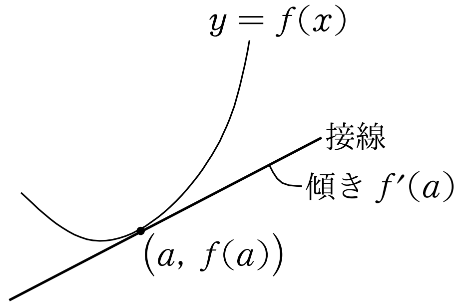
座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

接線の方程式 は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

とくに 点 $\big(a,\ f(a)\big)$ を 接点（せってん） という.



法線の方程式

座標平面において

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\big(a,\ f(a)\big)$ における

法線の方程式 は

$\boxed{1}$ $f'(a) \fallingdotseq 0$ のとき

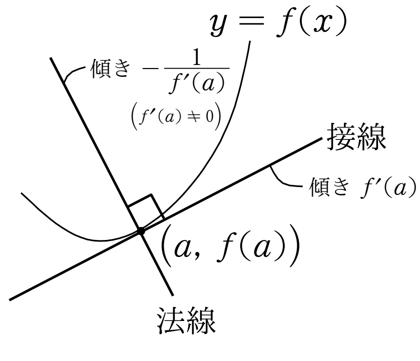
$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ のとき

$$x=a$$

法線の方程式の一般形として

$$x+f'(a)y=a+f'(a)f(a)$$



補 法線は接点を通り，接線に直交する直線

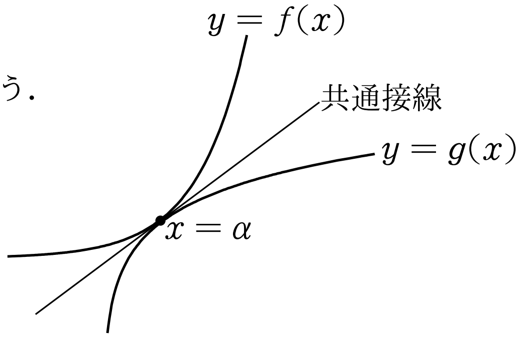
補 法線の法線ベクトルは接線の方向ベクトル $\big(1,\ f'(a)\big)$

2 曲線が接する条件

座標平面で

2 曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ が $x=\alpha$ で共通接線をもつとき

2 曲線 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$ は $x=\alpha$ で接するという．



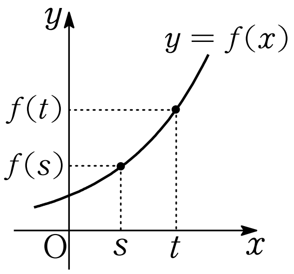
このとき

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

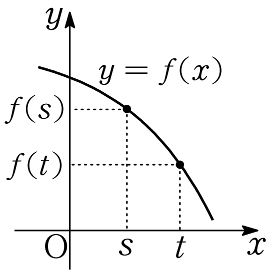
単調増加関数・単調減少関数

関数 $f(x)$ における定義域内の任意の値 s，t について

1



2



1 $s<t$ ならば $f(s)<f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ は **単調増加関数** という．

2 $s<t$ ならば $f(s)>f(t)$ が成り立つとき

$f(x)$ は **単調減少関数** という．

補 1 を厳密には「狭義」の単調増加関数という．

「$f(s)<f(t)$」を「$f(s) \leqq f(t)$」をしたものを「広義」の単調増加関数という．

2 を厳密には「狭義」の単調減少関数という．

「$f(s)>f(t)$」を「$f(s) \geqq f(t)$」をしたものを「広義」の単調減少関数という．

高校数学では「広義」のものは基本的に考えない．

導関数の符号と関数の増減

関数 $y=f(x)$ の値の **増減** は次のようになる.

$\boxed{1}$ 開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)>0$ ならば

閉区間 $[a,\,b]$ で $f(x)$ は 増加（↗）する.

$\boxed{2}$ 開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)<0$ ならば

閉区間 $[a,\,b]$ で $f(x)$ は 減少（↘）する.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)$ が開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)=0$ ならば

$f(x)$ は閉区間 $[a,\,b]$ で定数である.

補 $\boxed{1}$ $f(x)$ が増加する区間で $y=f(x)$ の接線を引くと傾きが正になる.

$\boxed{2}$ $f(x)$ が減少する区間で $y=f(x)$ の接線を引くと傾きが負になる.

$\boxed{3}$ つねに $f'(x)=0$ は $y=f(x)$ のグラフが傾きが 0 の直線になる.

考 閉区間 $[a,\,b]$ の任意の $s,\,t$ $(s<t)$ に対して平均値の定理を用いて

$$f(t)-f(s)=f'(c)(t-s)$$

を満たす $s<c<t$ となる実数 c が存在する.

ここで $t-s>0$

$\boxed{1}$ 開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)>0$ ならば $f'(c)>0$

よって $f(t)-f(s)>0$ すなわち $f(s)<f(t)$ であるから $f(x)$ は増加する.

$\boxed{2}$ 開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)<0$ ならば $f'(c)<0$

よって $f(t)-f(s)<0$ すなわち $f(s)>f(t)$ であるから $f(x)$ は減少する.

$\boxed{3}$ 開区間 $(a,\,b)$ でつねに $f'(x)=0$ ならば $f'(c)=0$

よって $f(t)-f(s)=0$ すなわち $f(t)=f(s)$ であるから $f(x)$ は定数である.

極値

関数 $y=f(x)$ において

$\boxed{1}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 増加（$\nearrow$）から 減少（$\searrow$）となるとき

$f(x)$ は $x=a$ において極大になるという．

そのときの $y=f(x)$ 上の点を極大点といい，値 $f(a)$ を **極大値** という．

$\boxed{2}$ $x=a$ の前後で $f(x)$ の値が 減少（$\searrow$）から 増加（$\nearrow$）となるとき

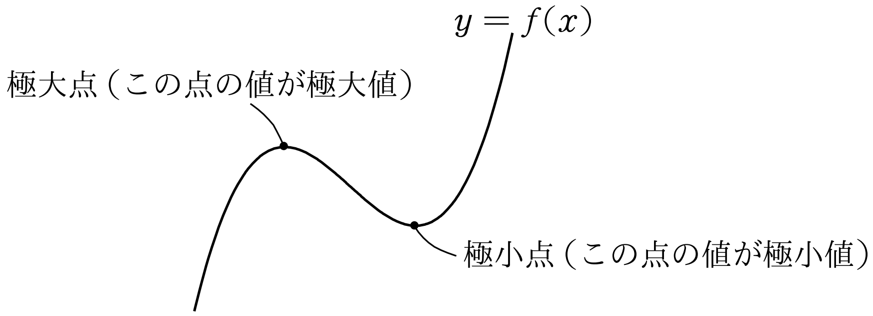
$f(x)$ は $x=a$ において極小になるという．

そのときの $y=f(x)$ 上の点を極小点といい，値 $f(a)$ を **極小値** という．

さらに 極大値と極小値を合わせて **極値** という．

㊟補 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でなくても極大や極小になることがある．

㊟例



極大・極小と微分係数

関数 $f(x)$ は微分可能であるとして

$\boxed{1}$ $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるならば $f'(a)=0$

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ であっても $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるとは限らない．

$f'(a)=0$ ならば x の値を大きくして $x=a$ の前後で

$f'(x)$ の値が正 $(\oplus)$ から負 $(\ominus)$ に変われば $f(a)$ は 極大値

$f'(x)$ の値が負 $(\ominus)$ から正 $(\oplus)$ に変われば，$f(a)$ は 極小値

$f'(x)$ の値の符号が変わらなければ，$f(a)$ は 極値ではない

曲線の凹凸

微分可能な関数 $C : y = f(x)$ のグラフについて

1 ある区間で C の接線の傾きが，x の増加にともなって大きくなるとき，

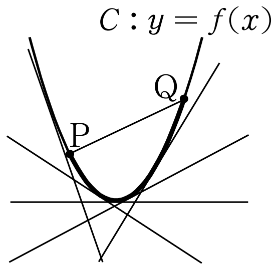
すなわち $f'(x)$ が増加するとき，

曲線 C はその区間で下に凸(とつ)であるという．

このとき，この区間の C 上の任意の 2 点 P，Q に対して

弧 PQ は線分 PQ の下側にある．

ただし，端点 P，Q は除く．



2 ある区間で C の接線の傾きが，x の増加にともなって小さくなるとき，

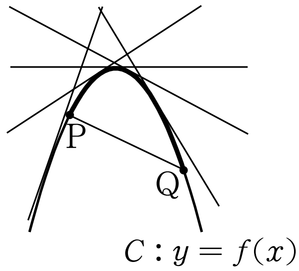
すなわち $f'(x)$ が減少するとき，

曲線 C はその区間で上に凸(とつ)であるという．

このとき，この区間の C 上の任意の 2 点 P，Q に対して

弧 PQ は線分 PQ の上側にある．

ただし，端点 P，Q は除く．



補 高校数学ではこれを定義にしている．厳密には凸関数を定義して考える．

第 2 次導関数の符号と曲線の凹凸

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数をもつとき

1 ⊕ $f''(x) > 0$ となる区間で $y = f(x)$ は 下に凸(とつ) $(\cup)$ である．

2 ⊖ $f''(x) < 0$ となる区間で $y = f(x)$ は 上に凸(とつ) $(\cap)$ である．

例 1 $y = x^2$ は $y' = 2x$，$y'' = 2 > 0$ で下に凸

2 $y = -x^2$ は $y' = -2x$，$y'' = -2 < 0$ で上に凸

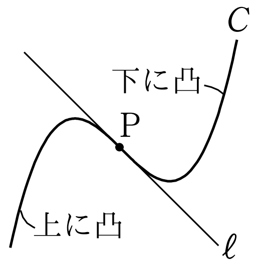
変曲点

連続な曲線 C 上の点 P で接線 ℓ が引けて，

点 P の前後で凹凸が変わるとき

点 P を 変曲点(へんきょくてん) という．

この点 P の前後の C の部分が ℓ に関して反対の側にある．



㊚ 大雑把に言うと，曲線の凹凸が入れかわる境の点を変曲点という．

$y=f(x)$ の変曲点

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が第 2 次導関数をもつとき

$f''(a)=0$ かつ $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ は変曲点である．

$\boxed{2}$ $f''(a)$ が存在しなくても $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変われば

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\bigl(a,\ f(a)\bigr)$ は変曲点である．

㊚ $\boxed{2}$ は変曲点で引く接線が y 軸に平行な場合である．

第 2 次導関数の値の符号と極値

関数 $f(x)$ が第 2 次導関数をもつとき

$\boxed{1}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ ならば $f(a)$ は 極大値

$\boxed{2}$ $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ ならば $f(a)$ は 極小値

関数の増減表の記号

関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を補助的に視覚化したものに**増減表**がある．

$f'(x)$ と場合によっては $f''(x)$ の符号を調べ，次のような記号を使う．

x	$\cdots$	$\triangle$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

x	$\cdots$	$\triangle$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	⤵	⤷	↱	⤴

補 増減表の書き方の定義はとくになく，増減がわかる程度にかけばよい．
$f'(x)$ の符号の調べ方には工夫が必要だが，それはまた講義でやる．

注 高校数学では片側微分は調べないので区間の端の $f'(x)$，$f''(x)$ は考えなくてよい．

極限と漸近線

$y=f(x)$ について a，b を定数として

$$\lim_{x\to\infty}\{y-(ax+b)\}=0 \quad \text{または} \quad \lim_{x\to-\infty}\{y-(ax+b)\}=0$$

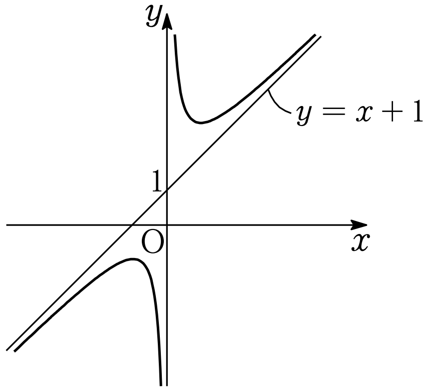
が成り立つとき

直線 $y=ax+b$ は 曲線 $y=f(x)$ の 漸近線 である．

例 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}+x+1$ について

$$\lim_{x\to\pm\infty}\Big\{y-(x+1)\Big\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

これより $y=x+1$ は $y=f(x)$ の漸近線である．



グラフの概形

座標平面の曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形を描くときは,

次のようなことについて調べるとよい.（全部を必ずしも調べなくてもよい）

$\boxed{1}$ 定義域（x の範囲）

$\boxed{2}$ 対称性，周期性

$\boxed{3}$ 増減，極値

$\boxed{4}$ 凹凸，変曲点

$\boxed{5}$ 座標軸との交点など特別な点

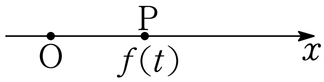
$\boxed{6}$ 漸近線

$\boxed{7}$ 連続でない点，微分可能でない点の様子

数直線上の動点の速度・速さ・加速度

数直線上を動く点 P の座標 x が媒介変数を t として

$$x = f(t)$$



と表されるとき，点 P の速度(そくど)を v，速(はや)さを $|v|$，加速度(かそくど)を α として

$$\text{速度 } v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$\text{速さ } |v| = \left|\frac{dx}{dt}\right| = |f'(t)|$$

$$\text{加速度 } \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t)$$

とくに

⊕ $v > 0$ のとき点 P は正の方向 (→) に動く

⊖ $v < 0$ のとき点 P は負の方向 (←) に動く

座標平面上の動点の速度・速さ・加速度

座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ が媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるとき，点 P の速度（そくど）を $\overrightarrow{v}$，速（はや）さを $\left|\overrightarrow{v}\right|$，加速度（かそくど）を $\overrightarrow{\alpha}$ として

速度 $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\, \dfrac{dy}{dt}\right) = \big(f'(t),\, g'(t)\big)$

速さ $\left|\overrightarrow{v}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$

加速度 $\overrightarrow{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\, \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$

加速度の大きさ $\left|\overrightarrow{\alpha}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

ここで 速度 $\overrightarrow{v}$ の向きは 点 P の描く曲線の接線の方向と一致する.

とくに

⊕ $\dfrac{dx}{dt} > 0$ のとき 点 P は x 軸の正の方向 $(\rightarrow)$ に動く

⊖ $\dfrac{dx}{dt} < 0$ のとき 点 P は x 軸の負の方向 $(\leftarrow)$ に動く

⊕ $\dfrac{dy}{dt} > 0$ のとき 点 P は y 軸の正の方向 $(\uparrow)$ に動く

⊖ $\dfrac{dy}{dt} < 0$ のとき 点 P は y 軸の負の方向 $(\downarrow)$ に動く

媒介変数表示で表された曲線の増減表の記号

座標平面上を動く点 P$(x,\, y)$ が媒介変数を t として

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

と表されるとき，増減表 は次のような記号を使う．

t	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\dfrac{dx}{dt}$	$-$	$-$	$+$	$+$
x	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\dfrac{dy}{dt}$	$-$	$+$	$-$	$+$
y	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$(x,\, y)$	$\swarrow$	$\nwarrow$	$\searrow$	$\nearrow$

㊟補 増減表の書き方の定義はとくになく，増減がわかる程度にかけばよい．

安田の定理

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ は微分可能 とする．

関数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ について $F'(\alpha)=0$ ならば

$$F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad \text{ただし } g'(\alpha)\neq 0$$

話 安田亨先生が作られた定理，「安田の公式」ともいう．

補 分数形の関数の極値を求めるのに威力を発揮する．

考 商の微分法より

$$F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$F'(x)=0$ とすると $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0$ ……①

$F'(\alpha)=0$ より ① を満たす x が α なので $f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)=0$

よって $\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

例 $F(x)=\dfrac{x+4}{x^2+4x+7}$ の極値について

$$F'(x)=\frac{x^2+4x+7-(x+4)(2x+4)}{(x^2+4x+7)^2}=\frac{-(x^2+8x+9)}{(x^2+4x+7)^2}$$

$F'(x)=0$ とすると $x^2+8x+9=0$ より $x=-4\pm\sqrt{7}$

x	$\cdots$	$-4-\sqrt{7}$	$\cdots$	$-4+\sqrt{7}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

$\alpha=-4-\sqrt{7}$ とおくと $\alpha^2+4\alpha+7-(\alpha+4)(2\alpha+4)=0$ $\left(F'(x)\text{ の分子より}\right)$

すなわち $\dfrac{\alpha+4}{\alpha^2+4\alpha+7}=\dfrac{1}{2\alpha+4}$

極小値 $F(\alpha)=\dfrac{\alpha+4}{\alpha^2+4\alpha+7}=\dfrac{1}{2(\alpha+2)}=\dfrac{1}{2(-2-\sqrt{7})}=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{7}}{6}}$

$\beta=-4+\sqrt{7}$ とおくと同様に

極大値 $F(\beta)=\dfrac{\beta+4}{\beta^2+4\beta+7}=\dfrac{1}{2(\beta+2)}=\dfrac{1}{2(-2+\sqrt{7})}=\boldsymbol{\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}}$

補 上の 例 のように式変形を説明すると減点されない．

直接計算しても求まるので，計算力があれば使わなくてもよい．

念のため 例 を説明しておくと

$f(x)=x+4,\ g(x)=x^2+4x+7$ とおくと $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)},\ f'(x)=1,\ g(x)=2x+4$

$F'(x)=0$ とすると $x=\alpha,\ \beta$

$$f(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}=\frac{1}{2\alpha+4}=\frac{1}{2(\alpha+2)}$$

$$f(\beta)=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}=\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)}=\frac{1}{2\beta+4}=\frac{1}{2(\beta+2)}$$

関数の 1 次近似式

1 h が 0 に近いとき $f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h$

2 x が 0 に近いとき $f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

考 1 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

2 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

補 1 で $a=0$ とすると 2 と同じことになる.

例 1 $f(x)=x^3$ とすると $f'(x)=3x^2$

$h \fallingdotseq 0$ のとき $f(1+h) \fallingdotseq f(1)+f'(1)h$

すなわち $(1+h)^3 \fallingdotseq 1+3h$

2 $f(x)=\sin x$ とすると $f'(x)=\cos x$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

すなわち $\sin x \fallingdotseq x$

この近似から $x\to 0$ とすると $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ が確認できる.

テーラー展開（Taylor expanshion）

何回でも微分可能な関数 $f(x)$ は次のような無限級数で表せる.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\alpha)(x-\alpha)^k \\
&= f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(x-\alpha)^2 \\
&\qquad + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)(x-\alpha)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n + \cdots
\end{aligned}
$$

この無限級数を $f(x)$ の $x=\alpha$ のまわりの **テーラー展開** という.

補 関数 $f(x)$ の $x=\alpha$ のまわりの近似が多項式で表せる.

マクローリン展開（Maclaurin expanshion）

何回でも微分可能な関数 $f(x)$ は次のような無限級数で表せる．

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$$
$$=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2$$
$$+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$$

この無限級数を $f(x)$ の **マクローリン展開** という．

㊓ $f(x)=e^x$ は $f^{(n)}(x)=e^x$，$f^{(n)}(0)=1$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \quad \cdots\cdots(*)$$

$(*)$ で $x=1$ とすると $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$

このとき $n=10$ までの和を計算すると

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$$
$$=2.7182818\cdots$$

e の値が近似されている．

$(*)$ が言えることから，次の不等式が成り立つことがわかる．（厳密な証明は微分法）

$x>0$ のとき

$$e^x\geqq 1+x$$
$$e^x\geqq 1+x+\frac{x^2}{2}$$
$$e^x\geqq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$
$$\vdots$$
$$e^x\geqq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

これより $x>0$ のもとで $e^x>\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ すなわち $0<\dfrac{x^n}{e^x}<\dfrac{(n+1)!}{x}$

ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(n+1)!}{x}=0$

はさみうちの原理を用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ ……①

$n=1$ として $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

$e^x=t$ とおくと $x=\log t$，$x\to\infty$ とすると $t\to\infty$

すなわち $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ ……②

① や ② の極限は証明なしで使うことも多いが，このような背景がある．

コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $a<c<b$ となる実数 c が存在する．

ただし 開区間 $(a,\ b)$ で $g'(x) \neq 0$，$g(a) \neq g(b)$

考 $F(x)=\{f(x)-f(a)\}\{g(b)-g(a)\}-\{g(x)-g(a)\}\{f(b)-f(a)\}$

とおくと

$$F'(x)=f'(x)\{g(b)-g(a)\}-g'(x)\{f(b)-f(a)\}$$

$F(a)=F(b)=0$ であるから，ロルの定理を用いて

$F'(c)=0$ を満たす $a<c<b$ の実数 c が存在する．すなわち

$$f'(c)\{g(b)-g(a)\}-g'(c)\{f(b)-f(a)\}=0$$

よって $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ を満たす実数 c が存在する．

ロピタルの定理

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$-\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形 かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ ならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$

ただし a, L は 数値 または ∞，$-\infty$

㊓ 本当は「ベルヌーイの定理」である．

㊓ この定理のすべてを証明することは高校数学の範囲を超える．

証明できないものを使うべきでないが，答えをとりあえず出すときには有効

便利すぎるので，使うと極限の力はつかず，長期的にはマイナスと思って勉強してほしい．

㊎ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ について

$f(x)=e^x-1$，$g(x)=x$ として $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形．

$f'(x)=e^x$，$g'(x)=1$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

㊓ ロピタルの定理の一部だけの証明を書いておく．

ロピタルの定理の一部

関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ の近くで微分可能として

$f(a)=0$，$g(a)=0$ であり 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ただし $x=a$ の近くでつねに $g(x)\neq 0$

㊟ a の近くで a とは異なる x の値を b とすれば

$f(a)=g(a)=0$ であるから，$\boxed{\text{コーシーの平均値の定理}}$を用いて

$$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が a と b の間に存在する．

このとき $b\to a$ ならば $c\to a$ であるから

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)}{g(b)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

よって $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$