$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であることを示せ．

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

〔 解答例 〕

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば $f'(a)$ が存在して

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \{f(x)-f(a)+f(a)\} \\
&= \lim_{x \to a} \left\{ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) + f(a) \right\} \\
&= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ について

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ ← 積の微分

が成り立つことを導関数の定義から示せ．

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

〔 解答例 〕

$F(x) = f(x)g(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

$- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)$

$\boxed{3}$ 微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

← 商の微分

が成り立つことを導関数の定義から示せ.

〔解答例〕

$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}
\end{aligned}$$

$\supset -f(x)g(x)+f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x) - f(x)\cdot\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}\\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}
\end{aligned}$$

$g(x+h) \to g(x)$

$\boxed{4}$　関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x)$ は連続，関数 $g(x)$ は微分可能，定義域内のすべての x で $g'(x) \neq 0$ とするとき

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

← 合成関数の微分

が成り立つことを導関数の定義から示せ.

必要ならば，h を 0 以外の実数として

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(c)$$

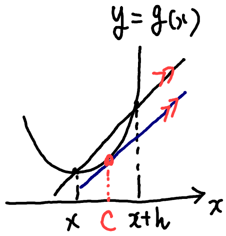
となる c が x と $x+h$ の間に存在することを用いてもよい.

〔解答例〕

問題にある用いてよいものは平均値の定理から出てくる

平均値の定理より

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(c) \quad \text{すなわち} \quad g(x+h) = g(x) + g'(c)h \quad \cdots\cdots①$$



となる c が x と $x+h$ の間に存在する.

このとき $h \to 0$ とすると　$c \to x$

$F(x) = f(g(x))$ とおくと

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\underbrace{\frac{f(g(x)+g'(c)h)-f(g(x))}{g'(c)h}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{g'(c)}_{g'(x)}\right\} \quad (\because ①,\ g'(c) \neq 0)$$

$$= f'(g(x))g'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+g'(c)h)-f(g(x))}{g'(c)h} = f'(g(x))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+mh)-f(x)}{mh} = f'(x)$$

㊤ 上の式はある x で $g'(x)=0$ としても成り立つ.

㊤ 合成関数の微分は次のようにおさえておけばよい

$\begin{cases} y = f(g(x)) \\ u = g(x) \end{cases}$ について

$y = f(u)$

$$\{f(g(x))\}' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= f'(u)\cdot g'(x)$$

$$= f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$\boxed{5}$　$(\sin x)' = \cos x$

が成り立つことを導関数の定義から示せ.

〔解答例〕

$f(x) = \sin x$ として

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \underbrace{\frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}}_{1} \right\} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

$\boxed{6}$ $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

が成り立つことを導関数の定義から示せ.

〔解答例〕

$f(x) = \log x$ として

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}}_{1} \right\} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&= \log e \\
&= 1
\end{aligned}$$

㊟ 定義域を拡張して $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ も成り立つ.

$x<0$ でも OK

$\boxed{7}$ e を自然対数の底とする．

$$(e^x)' = e^x$$

が成り立つことを導関数の定義から示せ．

〔解答例〕

$f(x) = e^x$ として

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{1} \right) \\ &= e^x \end{aligned}$$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

㊗ 導関数を用いず，$\boxed{6}$ で逆関数の微分を用いても微分できる．

$(\log x)' = \frac{1}{x}$

$$y = e^x$$

とおくと

$$x = \log y$$

両辺を y で微分して $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y}$

よって $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = y = e^x$