追加問題解答例「三角比と図形 ①」

1.　一辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE がある．

（1）　対角線の長さを求めよ．

（2）　$\angle\mathrm{CAD} = \theta$ とするとき，θ の値と $\cos\theta$ の値を求めよ．

〔 解答例 〕

（1）　$\mathrm{AC} = \mathrm{AD} = x$　とし AC と BD の交点を F とおく．

$\triangle\mathrm{ACD} \backsim \triangle\mathrm{DFC}$　であるから

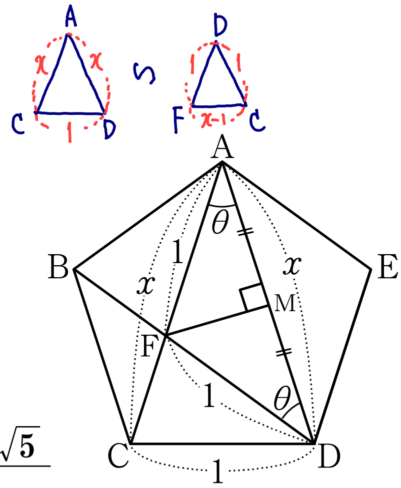
$x : 1 = 1 : (x-1)$　すなわち　$x^2 - x - 1 = 0$

$x > 0$ より　$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって，対角線の長さは $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

（2）　$\boldsymbol{\theta = 36^\circ}$

AD の中点を M とすると　$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AF}} = \dfrac{\frac{x}{2}}{1} = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}}$



2.　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CA} = 8$，$\angle\mathrm{C} = 60^\circ$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円を O とするとき，次の問いに答えよ．

（1）　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

（2）　円 O の半径を求めよ．

（3）　$\triangle\mathrm{ABC}$ と相似な $\triangle\mathrm{DEF}$ に円 O が内接しているとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEF}$ の相似比を求めよ．

〔 解答例 〕

（1）　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\cdot \sin 60^\circ = \boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

（2）　$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いて

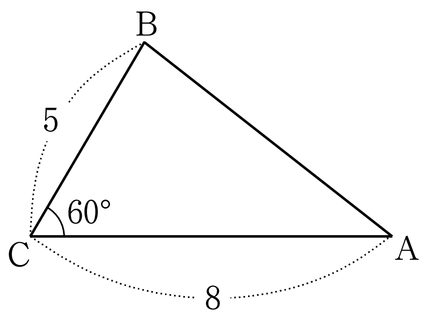
$$\mathrm{AB}^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 60^\circ = 49$$

これより　$\mathrm{AB} = 7$

円 O の半径を R として，$\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を用いて

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$$

よって　$R = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$

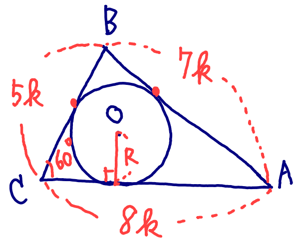


（3）　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEF}$ の相似比を $1 : k$ とすると

$\mathrm{CA} = 8k$，$\mathrm{AB} = 7k$，$\mathrm{BC} = 5k$

$$\triangle\mathrm{DEF} = \frac{1}{2}\cdot 8k\cdot 5k\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,k^2$$

$\triangle\mathrm{DEF}$ の内接円の半径は $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$



$\triangle\mathrm{DEF} = \dfrac{R}{2}(\mathrm{CA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC})$ が成り立つことから

$$10\sqrt{3}\,k^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot 20k \quad すなわち \quad k = \frac{7}{3}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEF}$ の相似比は　$1 : \dfrac{7}{3} = \mathbf{3:7}$

〔 別解例 〕（内接円の半径の比を考える）

(3)　$\triangle\mathrm{DEF}$ の内接円の半径は $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とすると

$$r = \frac{2\cdot 10\sqrt{3}}{5+8+7} = \sqrt{3}$$

よって $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEF}$ の相似比は

$$r : R = \sqrt{3} : \frac{7}{\sqrt{3}} = \mathbf{3:7}$$

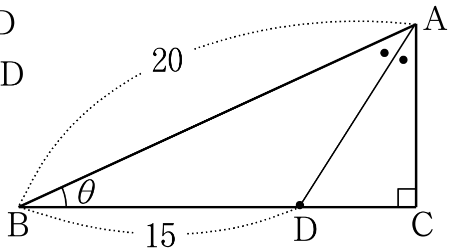
3.　$\angle\mathrm{ACB}$ が直角の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする．また，$\mathrm{AB}=20$，$\mathrm{BD}=15$ とする．

(1)　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}$ の値を求めよ．

(2)　線分 AD の長さを求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{ABD}$ の内接円の半径 r と，外接円の半径 R を求めよ．

〔 解答例 〕



(1)　AD は $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線より　$\mathrm{AC}:\mathrm{AB} = \mathrm{CD}:\mathrm{BD}$

これより　$\mathrm{AC}:20 = \mathrm{CD}:15$　すなわち　$15\mathrm{AC} = 20\mathrm{CD}$

よって　$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}} = \mathbf{\dfrac{3}{4}}$

(2)　$\mathrm{CD} = 3x$，$\mathrm{AC} = 4x$　とおくと $\mathrm{BC} = 3x+15$

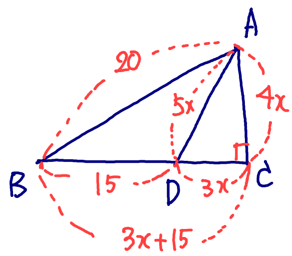
$\triangle\mathrm{ABD}$ は直角三角形なので　$\mathrm{AD} = 5x$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に三平方の定理を用いて $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2$

これより　$20^2 = (4x)^2 + (3x+15)^2$　であるから　$25x^2 + 90x - 175 = 0$

すなわち　$5(5x-7)(x+5) = 0$

よって　$x > 0$ なので　$x = \dfrac{7}{5}$　であるから　$\mathrm{AD} = 5x = \mathbf{7}$

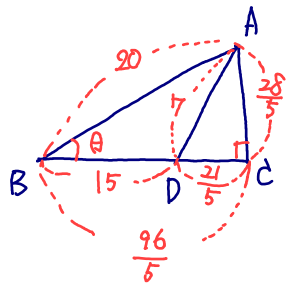


(3)　$\mathrm{AC} = 4x = \dfrac{28}{5}$

$\angle\mathrm{ABD} = \theta$ とおくと　$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{28}{5\cdot 20} = \dfrac{7}{25}$

$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 15\cdot\dfrac{7}{25} = 42$

よって　$r = \dfrac{2\,\triangle\mathrm{ABD}}{\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{AD}} = \dfrac{2\cdot 42}{20+15+7} = \mathbf{2}$



$\triangle\mathrm{ABD}$ に正弦定理を用いて　$\dfrac{7}{\sin\theta} = 2R$

よって　$R = \dfrac{1}{2}\cdot 7\cdot\dfrac{25}{7} = \mathbf{\dfrac{25}{2}}$