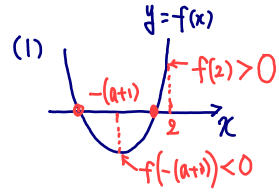
追加問題解答「2 次関数 ②」

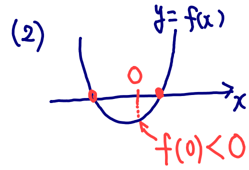
1.　a を定数とする．2 次方程式 $x^2+2(a+1)x+a+3=0$ について次の問に答えよ．

(1)　2 つの実数解がともに 2 より小さくなるような a の値の範囲を求めよ．

(2)　正の解と負の解を 1 つずつもつような a の値の範囲を求めよ．

〔 解答例 〕





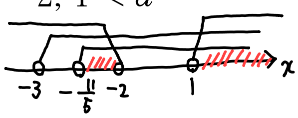
(1)　$f(x)=x^2+2(a+1)x+a+3=\{x+(a+1)\}^2-a^2-a+2$

とおく．

$$f(2)>0 \text{ かつ } -(a+1)<2 \text{ かつ } f\big(-(a+1)\big)<0$$

すなわち　$a>-\dfrac{11}{5}$ かつ $a>-3$ かつ $a<-2,\ 1<a$

よって　$\boldsymbol{-\dfrac{11}{5}<a<-2,\ 1<a}$



(2)　$f(0)<0$ より $a+3<0$　$\therefore\ \boldsymbol{a<-3}$

2.　長方形 ABCD において，AB ＝ CD ＝ 8，BC ＝ DA ＝ 12 とする．辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R を

$$\text{AP}=\text{BQ}=\text{CR}$$

となるようにとり，AP ＝ x とおく ($0<x<8$)．このとき，台形 PBCR の面積は $\boxed{\text{アイ}}$ である．また，△PQR の面積は S は

$$S=x^2-\boxed{\text{ウエ}}\,x+\boxed{\text{オカ}}$$

である．$S<24$ となる x の範囲は

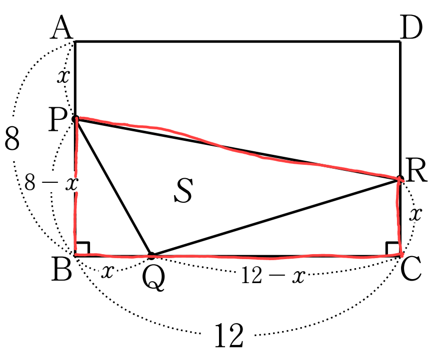
$$\boxed{\text{キ}}<x<\boxed{\text{ク}}$$

である．

〔2008　センター本試験〕

〔 解答例 〕

台形 PBCR の面積を T とすると



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\text{CR}+\text{PB})\cdot\text{BC} \\ &= \frac{1}{2}\{(8-x)+x\}\cdot 12 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12 \\ &= \boxed{\mathbf{48}}_{\text{アイ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= T-\triangle\text{PBQ}-\triangle\text{RCQ} \\ &= 48-\frac{1}{2}x(8-x)-\frac{1}{2}x(12-x) \\ &= 48-4x+\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}x^2 \\ &= x^2-\boxed{\mathbf{10}}_{\text{ウエ}}\,x+\boxed{\mathbf{48}}_{\text{オカ}} \end{aligned}$$

$S<24$ となるのは　$x^2-10x+48<24$　より　$x^2-10x+24<0$

すなわち　$(x-4)(x-6)<0$

よって　$\boxed{\mathbf{4}}_{\text{キ}}<x<\boxed{\mathbf{6}}_{\text{ク}}$

3.　放物線 $y = x^2 - 3ax + 4a^2$ と直線 $y = -2x - 1$ が異なる 2 つの交点をもつとき，実数の定数 a の範囲を求めよ．

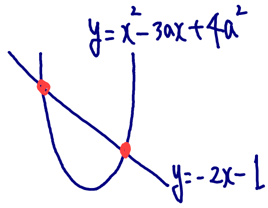
〔 解答例 〕

2 式を連立して　$x^2 - 3ax + 4a^2 = -2x - 1$　すなわち　$x^2 - (3a-2)x + 4a^2 + 1 = 0$

これが異なる 2 つの実数解をもつので，判別式を D として

$$D = (3a-2)^2 - 4(4a^2+1) = -7a^2 - 12a = -a(7a+12) > 0$$

よって　$\boldsymbol{-\dfrac{10}{7} < a < 0}$



4.　実数 x の関数 $f(x) = |x-1|(x-2)$ を考える．$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x + a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるのかを調べよ．

〔2011　千葉大〕

〔 解答例 〕

$f(x) = x + a$　すなわち　$f(x) - x = a$　　← 定数aを分離する

$g(x) = f(x) - x$

$= |x-1|(x-2) - x$　　② 絶対値をはずす

$$= \begin{cases} x \geqq 1 \text{ のとき} & (x-1)(x-2) - x = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2 \\ x < 1 \text{ のとき} & -(x-1)(x-2) - x = -x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1 \end{cases}$$

とおいて　$\begin{cases} y = g(x) \\ y = a \end{cases}$　の共有点の個数を考える．

よって，求める共有点の個数は

$$\begin{cases} \textbf{1 個} & (a < -2,\ -1 < a) \\ \textbf{2 個} & (a = -2,\ -1) \\ \textbf{3 個} & (-2 < a < -1) \end{cases}$$