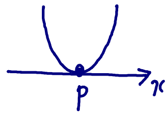
追加問題解答「2 次関数」

1.　x 軸に接し，2 点 $(-1,\,9)$，$(3,\,1)$ を通る 2 次関数を求めよ．

〔 略解 〕　↙ x軸に接するので頂点のy座標は0



求める 2 次関数の方程式は　$y = a(x-p)^2\ (a \neq 0)$　と表せる．

2 点 $(-1,\,9)$，$(3,\,1)$ を通るので　$\begin{cases} 9 = a(-1-p)^2 \\ 1 = a(3-p)^2 \end{cases}$

$\dfrac{9}{1} = \dfrac{a(-1-p)^2}{a(3-p)^2}$　← わって aを消す

より

$9(3-p)^2 = (-1-p)^2$

$9(9-6p+p^2) = 1+2p+p^2$

$8p^2-56p+80=0$　$\times \frac{1}{8}$

$p^2-7p+10=0$

a を消去して　$(p-2)(p-5)=0$　　$\therefore\ p = 2,\,5$

$p=2$ のとき　$a=1$，　　$p=5$ のとき　$a=\dfrac{1}{4}$

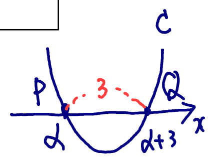
よって，求める 2 次関数は

$$\boldsymbol{y = (x-2)^2 = x^2-4x+4}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}(x-5)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}}$$

2.　$y=-2x^2+x+\sqrt{2}$ を平行移動させた放物線 C は点 $(1,\,-8)$ を通り，x 軸と異なる 2 点 P，Q で交わり，PQ $=3$ となる．C の方程式を求めよ．

〔 略解 〕　↙ PQ=3　　↙ 因数分解の形



$\mathrm{P}(\alpha,\,0)$，$\mathrm{Q}(\alpha+3,\,0)$ とおくと　$C: y = -2(x-\alpha)(x-\alpha-3)$　と表せる．

これが $(1,\,-8)$ を通るので　$-8 = -2(1-\alpha)(1-\alpha-3)$　となるので　$\alpha^2+\alpha-6=0$

$4 = (1-\alpha)(-\alpha-2)$

$\ \ = \alpha^2+\alpha-2$

$\alpha^2+\alpha-6=0$

すなわち　$(\alpha+3)(\alpha-2)=0$　　$\therefore\ \alpha = -3,\,2$

よって C は

$$\boldsymbol{y = -2(x+3)x = -2x^2-6x}$$

$$\boldsymbol{y = -2(x-2)(x-5) = -2x^2+14x-20}$$

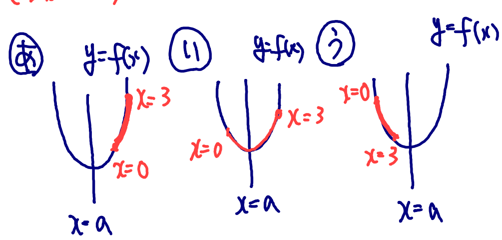
3.　x が $0 \leqq x \leqq 3$ という範囲を動くときの，関数

$f(x) = 2x^2-4ax+a+a^2$

の最小値 m が 0 となるような，定数 a の値をすべて求めよ．

〔 解答例 〕

$f(x) = 2x^2-4ax+a+a^2 = 2(x-a)^2+a-a^2$　← 軸x=aで場合分け



あ　$a<0$ のとき

$m = f(0) = a+a^2 = a(a+1) = 0$　　$\therefore\ a=-1$

い　$0 \leqq a \leqq 3$ のとき

$m = a-a^2 = a(1-a) = 0$　　$\therefore\ a = 0,\,1$

う　$3<a$ のとき

$m = f(3) = a^2-11a+18 = (a-2)(a-9) = 0$　　$\therefore\ a=9$

よって　$\boldsymbol{a = -1,\,0,\,1,\,9}$

2 次関数 $f(x) = -2x^2 + 4kx - k^2 - 2k + 2$ に対し，次の問いに答えよ．

(1)　$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を k を用いて表せ．

(2)　範囲 $0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を $m(k)$ とするとき，$m(k)$ を k の式で表せ．

(3)　範囲 $0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を $M(k)$ とするとき，$M(k)$ を k の式で表せ．

(4)　k がすべての実数を動くとき，(3) で求めた $M(k)$ の最大値を求めよ．

〔解答例〕

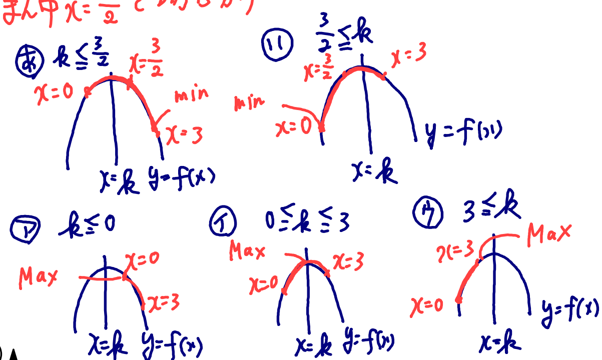
y = f(x) のグラフは上に凸

(1)　$f(x) = -2x^2 + 4kx - k^2 - 2k + 2 = -2(x-k)^2 + k^2 - 2k + 2$

よって，頂点の座標は $\boldsymbol{(k,\ k^2 - 2k + 2)}$

(2)
$$m(k) = \begin{cases} k \leqq \dfrac{3}{2} \text{ のとき} & f(3) \leftarrow \text{あ} \\ \dfrac{3}{2} \leqq k \text{ のとき} & f(0) \leftarrow \text{い} \end{cases}$$

← $0 \leqq x \leqq 3$ のまん中 $x = \frac{3}{2}$ で場合分け



よって
$$\boldsymbol{m(k)} = \begin{cases} -k^2 + 10k - 16 & \left(k \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ -k^2 - 2k + 2 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq k\right) \end{cases}$$

(3)
$$M(k) = \begin{cases} k \leqq 0 \text{ のとき} & f(0) \leftarrow \text{ア} \\ 0 \leqq k \leqq 3 \text{ のとき} & f(k) \leftarrow \text{イ} \\ 3 \leqq k \text{ のとき} & f(3) \leftarrow \text{ウ} \end{cases}$$

よって
$$\boldsymbol{M(k)} = \begin{cases} -k^2 - 2k + 2 & (k \leqq 0) \\ k^2 - 2k + 2 & (0 \leqq k \leqq 3) \\ -k^2 + 10k - 16 & (3 \leqq k) \end{cases}$$

(4)　平方完成して
$$\boldsymbol{M(k)} = \begin{cases} -(k+1)^2 + 3 & (k \leqq 0) \\ (k-1)^2 + 1 & (0 \leqq k \leqq 3) \\ -(k-5)^2 + 9 & (3 \leqq k) \end{cases}$$

グラフを考えて $k = 5$ のとき最大値 $\boldsymbol{9}$

グラフを描けばわかる！