

数 学 I

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 20)

[1] 実数 x についての不等式

$$|x + 6| \leq 2$$

の解は

$$\boxed{\text{アイ}} \leq x \leq \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

よって、実数 a, b, c, d が

$$|(1 - \sqrt{3})(a - b)(c - d) + 6| \leq 2$$

を満たしているとき、 $1 - \sqrt{3}$ は負であることに注意すると、 $(a - b)(c - d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leq (a - b)(c - d) \leq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

特に

$$(a - b)(c - d) = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3} \dots\dots\dots \text{①}$$

であるとき, さらに

$$(a - c)(b - d) = -3 + \sqrt{3} \dots\dots\dots \text{②}$$

が成り立つならば

$$(a - d)(c - b) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \dots\dots\dots \text{③}$$

であることが, 等式①, ②, ③の左辺を展開して比較することによりわかる。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) U を全体集合とし、 A, B, C を U の部分集合とする。 U の部分集合 X に対して、 X の補集合を \bar{X} で表す。

(1) U, A, B, C の関係を図1のように表すと、例えば、 $A \cap (B \cup C)$ は A と $B \cup C$ の共通部分で、 $B \cup C$ は図2の斜線部分なので、 $A \cap (B \cup C)$ は図3の斜線部分となる。

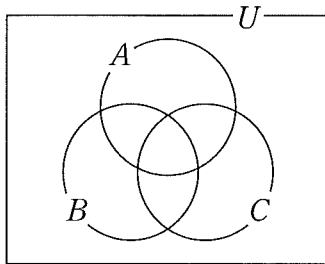


図 1

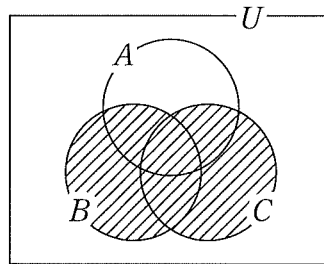


図 2

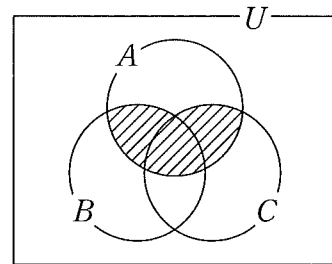
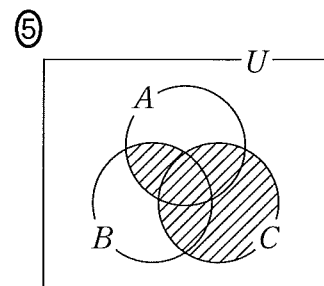
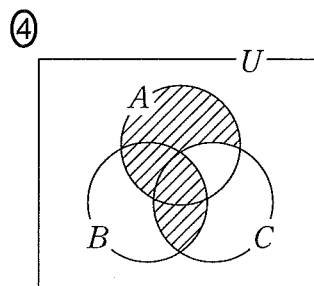
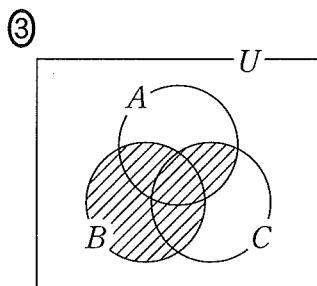
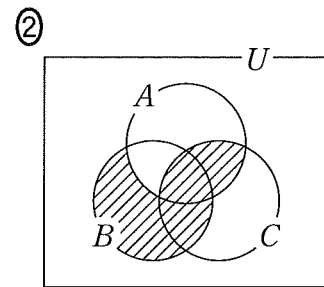
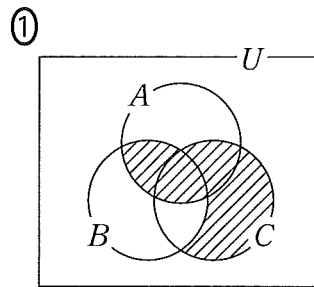
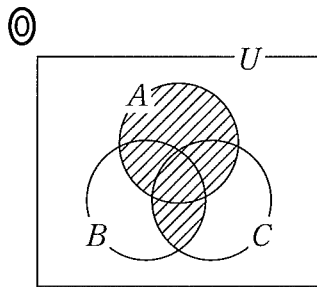


図 3

このとき、 $(A \cap \bar{C}) \cup (B \cap C)$ は の斜線部分である。

については、最も適当なものを、次の①～⑤のうちから一つ選べ。



(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

(2) 全体集合 U を

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

とする。また、 U の部分集合 A, B を次のように定める。

$$A = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}, \quad B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

(i) このとき

$$A \cap B = \{ \boxed{\text{シ}}, \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}} \}$$

$$\bar{A} \cap B = \{ \boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}} \}$$

である。ただし

$$\boxed{\text{シ}} < \boxed{\text{ス}} < \boxed{\text{セ}}, \quad \boxed{\text{ソ}} < \boxed{\text{タ}} < \boxed{\text{チ}}$$

とする。

(ii) U の部分集合 C は

$$(A \cap \bar{C}) \cup (B \cap C) = A$$

を満たすとする。このとき、次のことが成り立つ。

• $\bar{A} \cap B$ の $\boxed{\text{ツ}}$ 。

• $A \cap \bar{B}$ の $\boxed{\text{テ}}$ 。

$\boxed{\text{ツ}}$, $\boxed{\text{テ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | |
|--|
| <p>① すべての要素は C の要素である</p> <p>② どの要素も C の要素ではない</p> <p>③ 要素には、C の要素であるものと、C の要素でないものがある</p> |
|--|

数学 I

第 2 問 (配点 30)

(1) 点 O を中心とし、半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を $AB = 6$ となるようにとる。また、円 O の円周上に、2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

(i) $\sin \angle ACB = \boxed{\text{ア}}$ である。また、点 C を $\angle ACB$ が鈍角となるようにとるとき、 $\cos \angle ACB = \boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) 点 C を $\angle ACB$ が鈍角で $BC = 5$ となるようにとる。このとき、

$$AC = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}$$
 である。

(iii) 点 C を $\triangle ABC$ の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き、直線 AB との交点を D とするとき、 $\tan \angle OAD = \boxed{\text{カ}}$ である。また、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{キク}}$ である。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

(iv) 点 C を, (iii) と同様に, $\triangle ABC$ の面積が最大となるようにとる。このとき,

$\tan \angle ACB = \boxed{\text{ケ}}$ である。

さらに, 点 C を通り直線 AC に垂直な直線を引き, 直線 AB との交点を E とする。このとき, $\sin \angle BCE = \boxed{\text{コ}}$ である。

点 F を線分 CE 上にとるとき, BF の長さの最小値は $\frac{\boxed{\text{サシ}} \sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$

である。

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ の解答群 (同じものを繰り返し選んでもよい。)

⑩ $\frac{3}{5}$	⑪ $\frac{3}{4}$	⑫ $\frac{4}{5}$	⑬ 1	⑭ $\frac{4}{3}$
⑮ $-\frac{3}{5}$	⑯ $-\frac{3}{4}$	⑰ $-\frac{4}{5}$	⑱ -1	⑲ $-\frac{4}{3}$

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 半径が5である球Sがある。この球面上に3点P, Q, Rをとったとき、これらの3点を通る平面 α 上で $PQ = 8$, $QR = 5$, $RP = 9$ であったとする。

球Sの球面上に点Tを三角錐^{すい}TPQRの体積が最大となるようにとるとき、その体積を求めよう。

まず、 $\cos \angle QPR = \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることから、 $\triangle PQR$ の面積は

$\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ である。

次に、点Tから平面 α に垂直な直線を引き、平面 α との交点をHとする。このとき、PH, QH, RHの長さについて、 $\boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

以上より、三角錐TPQRの体積は $\boxed{\text{ニヌ}} \left(\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}} \right)$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

- | | |
|----------------|----------------|
| ① PH < QH < RH | ① PH < RH < QH |
| ② QH < PH < RH | ③ QH < RH < PH |
| ④ RH < PH < QH | ⑤ RH < QH < PH |
| ⑥ PH = QH = RH | |

数学 I

第 3 問 (配点 20)

太郎さんは、総務省が公表している 2020 年の家計調査の結果を用いて、地域による食文化の違いについて考えている。家計調査における調査地点は、都道府県庁所在市および政令指定都市(都道府県庁所在市を除く)であり、合計 52 市である。家計調査の結果の中でも、スーパーマーケットなどで販売されている調理食品の「二人以上の世帯の 1 世帯当たり年間支出金額(以下、支出金額、単位は円)」を分析することにした。以下においては、52 市の調理食品の支出金額をデータとして用いる。

太郎さんは調理食品として、最初にうなぎのかば焼き(以下、かば焼き)に着目し、図 1 のように 52 市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。ただし、ヒストグラムの各階級の区間は、左側の数値を含み、右側の数値を含まない。

なお、以下の図や表については、総務省の Web ページをもとに作成している。

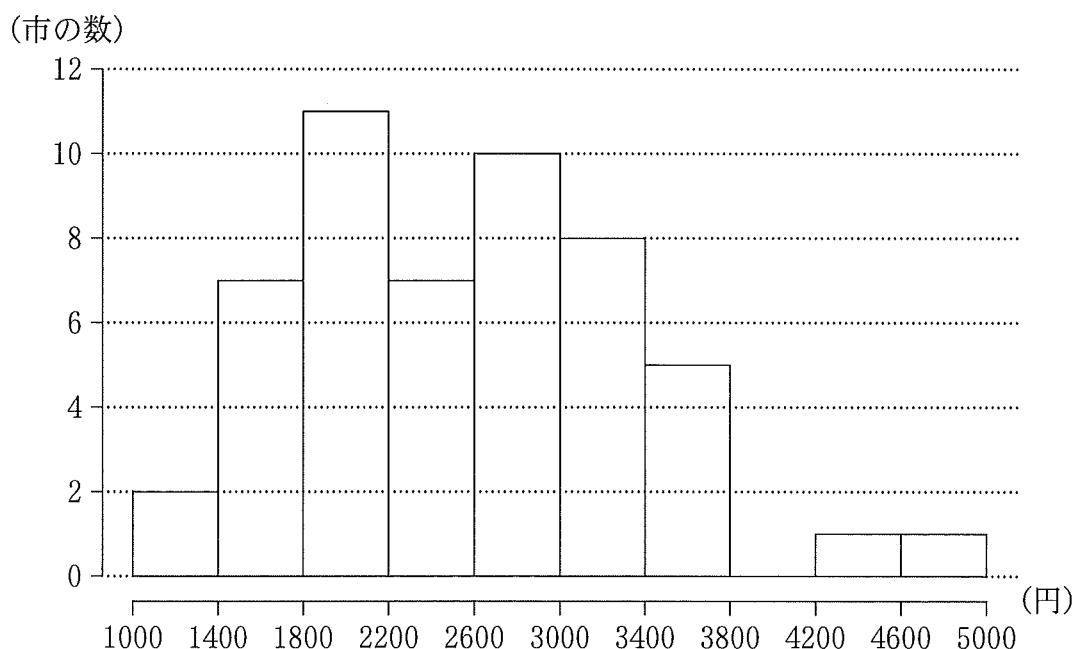


図 1 かば焼きの支出金額のヒストグラム

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(1) 図 1 から次のことが読み取れる。

- 中央値が含まれる階級は である。
- 第 1 四分位数が含まれる階級は である。
- 第 3 四分位数が含まれる階級は である。
- 四分位範囲は 。

~ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

- | | |
|-------------------|-------------------|
| ① 1000 以上 1400 未満 | ⑤ 3000 以上 3400 未満 |
| ② 1800 以上 2200 未満 | ⑥ 3400 以上 3800 未満 |
| ③ 2200 以上 2600 未満 | ⑦ 3800 以上 4200 未満 |
| ④ 2600 以上 3000 未満 | ⑧ 4200 以上 4600 未満 |
| ⑧ 4200 以上 4600 未満 | ⑨ 4600 以上 5000 未満 |

の解答群

- | |
|-------------------------|
| ① 800 より小さい |
| ② 1600 より大きく 2400 より小さい |
| ③ 2400 より大きく 3200 より小さい |
| ④ 3200 より大きく 4000 より小さい |
| ⑤ 4000 より大きい |

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 太郎さんは、東西での地域による食文化の違いを調べるために、52 市を東側の地域 E (19 市) と西側の地域 W (33 市) の二つに分けて考えることにした。

(i) 地域 E と地域 W について、かば焼きの支出金額の箱ひげ図を、図 2、図 3 のようにそれぞれ作成した。

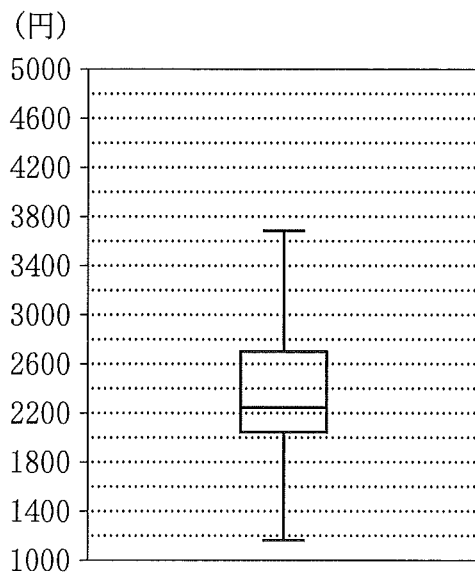


図 2 地域 E におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

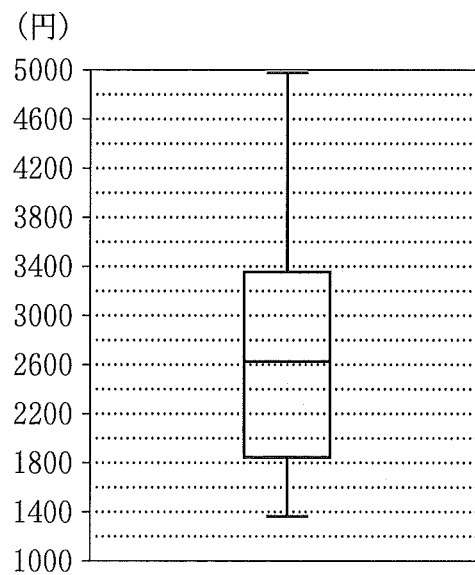


図 3 地域 W におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

かば焼きの支出金額について、図 2 と図 3 から読み取れることとして、次の

①～③のうち、正しいものは オ である。

オ の解答群

- ① 地域 E において、小さい方から 5 番目は 2000 以下である。
- ② 地域 E と地域 W の範囲は等しい。
- ③ 中央値は、地域 E より地域 W の方が大きい。
- ④ 2600 未満の市の割合は、地域 E より地域 W の方が大きい。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

- (ii) 太郎さんは、地域 E と地域 W のデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い、それぞれの分散を考えることにした。地域 E におけるかば焼きの支出金額の分散は、地域 E のそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の カ である。

カ の解答群

- ① 2 乗を合計した値
- ② 絶対値を合計した値
- ③ 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値
- ④ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値
- ⑤ 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち
正のもの
- ⑥ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち
正のもの

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

(3) 太郎さんは、(2)で考えた地域 E における、やきとりの支出金額についても調べることにした。

ここでは地域 E において、やきとりの支出金額が増加すれば、かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え、まず図 4 のように、地域 E における、やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した。そして、相関係数を計算するために、表 1 のように平均値、分散、標準偏差および共分散を算出した。ただし、共分散は地域 E のそれぞれの市における、やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。

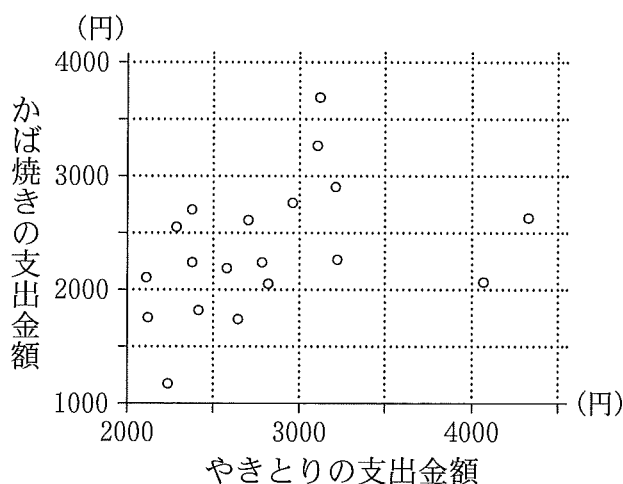


図 4 地域 E における、やきとりとかば焼きの支出金額の散布図

表 1 地域 E における、やきとりとかば焼きの支出金額の平均値、分散、標準偏差および共分散

	平均値	分散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	124000
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

(i) 表 1 を用いると、地域 E における、やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は である。

については、最も適当なものを、次の①～⑩のうちから一つ選べ。

①	- 0.62	②	- 0.50	③	- 0.37	④	- 0.19
⑤	- 0.02	⑥	0.02	⑦	0.19	⑧	0.37
⑨	0.50	⑩	0.62				

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

数学 I

(ii) 地域 E の 19 市それぞれにおける、やきとりの支出金額 x とかば焼きの支出金額 y の値の組を

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{19}, y_{19})$$

とする。この支出金額のデータを千円単位に変換することを考える。地域 E において千円単位に変換した、やきとりの支出金額 x' とかば焼きの支出金額 y' の値の組を

$$(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), \dots, (x'_{19}, y'_{19})$$

とすると

$$\begin{cases} x'_i = \frac{x_i}{1000} \\ y'_i = \frac{y_i}{1000} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 19)$$

と表される。このとき、次のことが成り立つ。

- x' の分散は $\boxed{\text{ク}}$ となる。
- x' と y' の相関係数は、 x と y の相関係数 $\boxed{\text{ケ}}$ 。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

ク の解答群

- | | | | | | |
|---|-------------------------|---|------------------------|---|--------|
| ① | $\frac{348100}{1000^2}$ | ② | $\frac{348100}{1000}$ | ③ | 348100 |
| ④ | 1000×348100 | ⑤ | $1000^2 \times 348100$ | | |

ケ の解答群

- | | | | | | |
|---|---------------------------|---|-------------------------|---|------|
| ① | の $\frac{1}{1000^2}$ 倍となる | ② | の $\frac{1}{1000}$ 倍となる | ③ | と等しい |
| ④ | の 1000 倍となる | ⑤ | の 1000^2 倍となる | | |

数学 I

第 4 問 (配点 30)

〔1〕 p を実数とし、 $f(x) = (x - 2)(x - 8) + p$ とする。

(1) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イウ}} + p \right)$$

である。

(2) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との位置関係は、 p の値によって次のように三つの場合に分けられる。

$p > \boxed{\text{エ}}$ のとき、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$p = \boxed{\text{エ}}$ のとき、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と点 $(\boxed{\text{オ}}, 0)$ で接する。

$p < \boxed{\text{エ}}$ のとき、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

- (3) 2次関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -3 , y 軸方向に 5 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2次関数を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = x^2 - \boxed{\text{カ}}x + p$$

となる。

関数 $y = |f(x) - g(x)|$ のグラフを考えることにより、

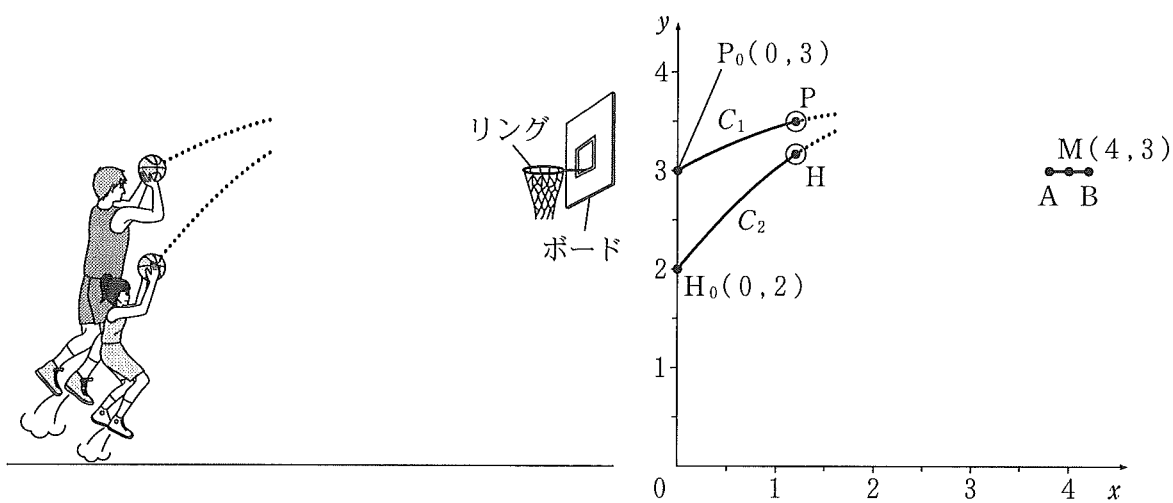
関数 $y = |f(x) - g(x)|$ は $x = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小値をとることがわかる。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

〔2〕 太郎さんと花子さんは、バスケットボールのプロ選手の中には、リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り、シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は、図 1 のように座標軸が定められた平面上に、プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき、ボールがリングに入った場合について、後の仮定を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが、以下では省略する。



参考図

図 1

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

仮定

- 平面上では、ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8, 3), 右端を点 B(4.2, 3) とし, リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り, かつ, ボールの中心が AB の中点 M(4, 3) を通る場合を考える。ただし, ボールがリングに当たるとは, ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし, P は, はじめに点 P₀(0, 3) にあるものとする。また, P₀, M を通る, 上に凸の放物線を C₁ とし, P は C₁ 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし, H は, はじめに点 H₀(0, 2) にあるものとする。また, H₀, M を通る, 上に凸の放物線を C₂ とし, H は C₂ 上を動くものとする。
- 放物線 C₁ や C₂ に対して, 頂点の y 座標を「シュートの高さ」とし, 頂点の x 座標を「ボールが最も高くなるときの地上の位置」とする。

(1) 放物線 C₁ の方程式における x² の係数を a とする。放物線 C₁ の方程式は

$$y = ax^2 - \boxed{\text{ケ}} ax + \boxed{\text{コ}}$$

と表すことができる。また, プロ選手の「シュートの高さ」は

$$- \boxed{\text{サ}} a + \boxed{\text{シ}}$$

である。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は

$$y = p \left\{ x - \left(2 - \frac{1}{8p} \right) \right\}^2 - \frac{(16p - 1)^2}{64p} + 2$$

と表すことができる。

プロ選手と花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の比較の記述として、次の①～③のうち、正しいものは ス である。

ス の解答群

- ① プロ選手と花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は、つねに一致する。
- ② プロ選手の「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が、つねに M の x 座標に近い。
- ③ 花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が、つねに M の x 座標に近い。
- ④ プロ選手の「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が M の x 座標に近いときもあれば、花子さんの「ボールが最も高くなるときの地上の位置」の方が M の x 座標に近いときもある。

(数学 I 第 4 問は 26 ページに続く。)

数学 I

- (2) 二人は、ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「シュートの高さ」について次のように話している。

太郎：例えば、プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには、Pがリングの左端Aのどのくらい上を通れば良いのかな。

花子：Aの真上の点でPが通る点Dを、線分DMがAを中心とする半径0.1の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。

太郎：なるほど。Pの軌道は上に凸の放物線で山なりだから、その場合、図2のように、PはDを通った後で線分DMより上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も、HがこのDを通れば、ボールはリングに当たらないね。

花子：放物線 C_1 と C_2 がDを通る場合でプロ選手と私の「シュートの高さ」を比べてみようよ。

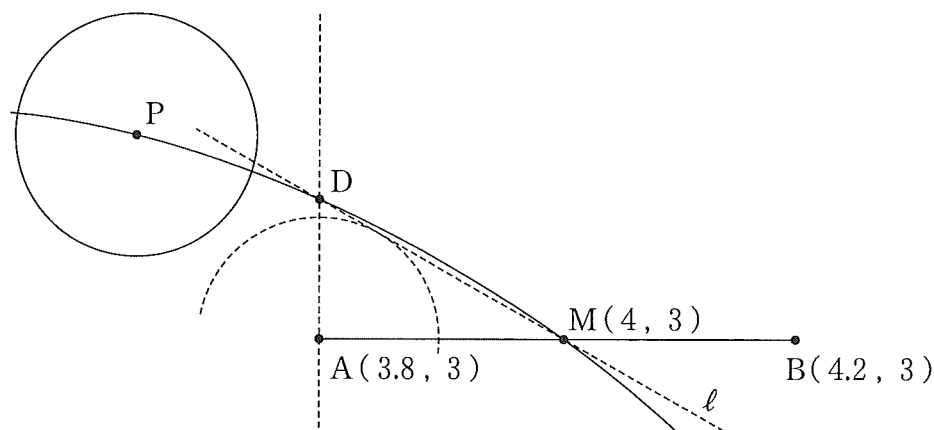


図 2

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

図2のように、Mを通る直線 l が、Aを中心とする半径0.1の円に直線ABの上側で接しているとする。また、Aを通り直線ABに垂直な直線を引き、 l との交点をDとする。このとき、 $AD = \frac{\sqrt{3}}{15}$ である。

よって、放物線 C_1 がDを通るとき、 C_1 の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}(x^2 - \boxed{\text{ケ}}x) + \boxed{\text{コ}}$$

となる。

また、放物線 C_2 がDを通るとき、(1)で与えられた C_2 の方程式を用いると、花子さんの「シュートの高さ」は約3.4と求められる。

以上のことから、放物線 C_1 と C_2 がDを通るとき、プロ選手と花子さんの「シュートの高さ」を比べると、 $\boxed{\text{ツ}}$ の「シュートの高さ」の方が大きく、その差はボール $\boxed{\text{テ}}$ である。なお、 $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$ である。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

- ① プロ選手 ② 花子さん

$\boxed{\text{テ}}$ については、最も適当なものを、次の①～③のうちから一つ選べ。

- ① 約1個分 ② 約2個分 ③ 約3個分 ④ 約4個分