数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問 （配点　30）

〔1〕 座標平面上で，直線 $3x+2y-39=0$ を ℓ_1 とする。また，k を実数とし，直線 $kx-y-5k+12=0$ を ℓ_2 とする。

(1) 直線 ℓ_1 と x 軸は，点 $\left(\boxed{\text{アイ}},\ 0\right)$ で交わる。

また，直線 ℓ_2 は k の値に関係なく点 $\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エオ}}\right)$ を通り，直線 ℓ_1 もこの点を通る。

(2) 2直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形が**できないような** k の値は

$$k=\boxed{\text{カ}},\ \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3)　2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができるとき，この三角形の周および内部からなる領域を D とする。さらに，r を正の実数とし，不等式 $x^2 + y^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とする。

直線 ℓ_2 が点$(-13,\ 0)$を通る場合を考える。このとき，$k = \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。さらに，D が E に含まれるような r の値の範囲は

$$r \geqq \boxed{\text{シス}}$$

である。

次に，$r = \boxed{\text{シス}}$ の場合を考える。このとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は

$$k \geqq \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \quad \text{または} \quad k < \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

である。

（数学Ⅱ第 1 問は次ページに続く。）

〔2〕 θ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(1) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ のとき，$\theta =$ $\boxed{テ}$ であり

$\cos\theta =$ $\boxed{ト}$，$\sin\theta =$ $\boxed{ナ}$

である。

一般に，$\tan\theta = k$ のとき

$\cos\theta =$ $\boxed{ニ}$，$\sin\theta =$ $\boxed{ヌ}$

である。

$\boxed{テ}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{\pi}{3}$	① $-\dfrac{\pi}{4}$	② $-\dfrac{\pi}{6}$	③ $\dfrac{\pi}{6}$	④ $\dfrac{\pi}{4}$	⑤ $\dfrac{\pi}{3}$

$\boxed{ト}$，$\boxed{ナ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	④ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{ニ}$，$\boxed{ヌ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\dfrac{1}{1+k^2}$	① $-\dfrac{1}{1+k^2}$	② $\dfrac{k}{1+k^2}$	③ $-\dfrac{k}{1+k^2}$
④ $\dfrac{2}{1+k^2}$	⑤ $-\dfrac{2}{1+k^2}$	⑥ $\dfrac{2k}{1+k^2}$	⑦ $-\dfrac{2k}{1+k^2}$
⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓐ $\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓑ $-\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2) 花子さんと太郎さんは，関数のとり得る値の範囲について話している。

花子：$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体だよね。

太郎：$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ だけど，分子を少し変えるとどうなるかな。

$\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta} = p$，$\dfrac{\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta} = q$ とおく。

$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，p のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，q のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ $-1 < p < 1$　① $0 < p < 1$
② $-2 < p < 2$　③ $0 < p < 2$
④ 実数全体　⑤ 正の実数全体

$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群

⓪ $-1 < q < 1$　① $0 < q < 1$
② $-2 < q < 2$　③ $0 < q < 2$
④ 実数全体　⑤ 正の実数全体
⑥ $-\sin\dfrac{\pi}{7} < q < \sin\dfrac{\pi}{7}$　⑦ $0 < q < \sin\dfrac{\pi}{7}$
⑧ $-\cos\dfrac{\pi}{7} < q < \cos\dfrac{\pi}{7}$　⑨ $0 < q < \cos\dfrac{\pi}{7}$

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(3) α は $0 \leqq \alpha < 2\pi$ を満たすとし

$$\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos\theta} = r$$

とおく。$\alpha = \frac{\pi}{7}$ の場合，r は(2)で定めた q と等しい。

α の値を一つ定め，$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ のみを動かすとき，r のとり得る値の範囲を考える。

r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるような α $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$ は $\boxed{ハ}$。

$\boxed{ハ}$ の解答群

⓪ 存在しない	① ちょうど1個存在する
② ちょうど2個存在する	③ ちょうど3個存在する
④ ちょうど4個存在する	⑤ 5個以上存在する

第２問 （配点　30）

k を実数とし

$$f(x) = x^3 - kx$$

とおく。また，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。

必要に応じて，次のことを用いてもよい。

曲線 C の平行移動

曲線 C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y = (x - p)^3 - k(x - p) + q$$

である。

(1)　t を実数とし

$$g(x) = (x - t)^3 - k(x - t)$$

とおく。また，座標平面上の曲線 $y = g(x)$ を C_1 とする。

(i)　関数 $f(x)$ は $x = 2$ で極値をとるとする。

このとき，$f'(2) = \boxed{\text{ア}}$ であるから，$k = \boxed{\text{イウ}}$ であり，$f(x)$ は $x = \boxed{\text{エオ}}$ で極大値をとる。また，$g(x)$ が $x = 3$ で極大値をとるとき，$t = \boxed{\text{カ}}$ である。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(ii) $t = 1$ とする。また，曲線 C と C_1 は 2 点で交わるとし，一つの交点の x 座標は -2 であるとする。このとき，$k = \boxed{\text{キク}}$ であり，もう一方の交点の x 座標は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，C と C_1 で囲まれた図形のうち，$x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

（数学Ⅱ第 2 問は次ページに続く。）

⑵　a，b，c を実数とし

$$h(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + c$$

とおく。また，座標平面上の曲線 $y = h(x)$ を C_2 とする。

(i)　曲線 C を平行移動して，C_2 と一致させることができるかどうかを考察しよう。C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線が C_2 と一致するとき

$$h(x) = (x - p)^3 - k(x - p) + q \quad \cdots\cdots ①$$

である。よって，$p = \boxed{\text{スセ}}$，$b = \boxed{\text{ソ}}\,p^2 - k$ であり

$$k = \boxed{\text{タ}}\,a^2 - b \quad \cdots\cdots ②$$

である。また，① において，$x = p$ を代入すると，$q = h(p) = h\left(\boxed{\text{スセ}}\right)$ となる。

逆に，k が ② を満たすとき，C を x 軸方向に $\boxed{\text{スセ}}$，y 軸方向に $h\left(\boxed{\text{スセ}}\right)$ だけ平行移動させると C_2 と一致することが確かめられる。

（数学Ⅱ第２問は次ページに続く。）

(ii) $b = 3a^2 - 3$ とする。このとき，曲線 C_2 は曲線

$$y = x^3 - \boxed{チ}\,x$$

を平行移動したものと一致する。よって，$h(x)$ が $x = 4$ で極大値 3 をとるとき，$h(x)$ は $x = \boxed{ツ}$ で極小値 $\boxed{テト}$ をとることがわかる。

(iii) 次の⓪～③のうち，平行移動によって一致させることができる二つの異なる曲線は $\boxed{ナ}$ と $\boxed{ニ}$ である。

$\boxed{ナ}$，$\boxed{ニ}$ の解答群(解答の順序は問わない。)

⓪ $y = x^3 - x - 5$

① $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$

② $y = x^3 - 6x^2 - x - 4$

③ $y = x^3 - 6x^2 + 7x - 5$

第3問 (配点　20)

〔1〕　$1 \leqq x \leqq 4$ における関数

$$y = \log_2 x^4 \cdot \log_2 \frac{2}{x}$$

の最大値について考える。

$t = \log_2 x$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}} \leqq t \leqq \boxed{\text{イ}}$ である。このとき，y を t を用いて表すと

$$y = \boxed{\text{ウエ}}\, t^2 + \boxed{\text{オ}}\, t$$

となる。これより，y は $x = \boxed{\text{カ}}$ のとき，最大値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪　1	①　$\sqrt{2}$	②　2	③　$2\sqrt{2}$	④　4

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

〔2〕

(1) 関数 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ のグラフと $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ のグラフは $\boxed{\text{ク}}$ であり，関数 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ のグラフと $y=\log_{\frac{3}{2}} x$ のグラフは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ x 軸に関して対称	① y 軸に関して対称
② 直線 $y=x$ に関して対称	③ 原点に関して対称

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(2) 関数 $y = \log_{25} x$ のグラフは点$\left(\boxed{\text{コ}},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通り，$x$ の値が増加するとき $\boxed{\text{サ}}$ 。さらに，関数 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ のグラフは点$\left(\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通り，$x$ の値が増加するとき $\boxed{\text{セ}}$ 。このとき，これらの関数のグラフから，$\dfrac{1}{2}$ と $\log_{25}\dfrac{7}{2}$ と $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8}$ の間に $\boxed{\text{ソ}}$ が成り立つことがわかる。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{セ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ y の値は増加し，グラフは x 軸に限りなく近づく
① y の値は増加し，グラフは x 軸と 1 点で交わる
② y の値は減少し，グラフは x 軸に限りなく近づく
③ y の値は減少し，グラフは x 軸と 1 点で交わる

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2} < \log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8} < \log_{25}\dfrac{7}{2}$　① $\dfrac{1}{2} < \log_{25}\dfrac{7}{2} < \log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8}$

② $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8} < \dfrac{1}{2} < \log_{25}\dfrac{7}{2}$　③ $\log_{25}\dfrac{7}{2} < \dfrac{1}{2} < \log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8}$

④ $\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8} < \log_{25}\dfrac{7}{2} < \dfrac{1}{2}$　⑤ $\log_{25}\dfrac{7}{2} < \log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8} < \dfrac{1}{2}$

第４問 （配点　20）

x の整式 $P(x)$，$Q(x)$ を次のように定める。

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 12x - 21$$

$$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$$

⑴　$i^2 = -1$，$i^3 = \boxed{\text{ア}}\, i$，$i^4 = \boxed{\text{イ}}$ である。また

$$P(i) = \boxed{\text{ウエオ}} + \boxed{\text{カキ}}\, i$$

である。

⑵　太郎さんと花子さんは，$P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α が存在するかどうかについて話している。

> 太郎：方程式 $P(x) = 0$ と $Q(x) = 0$ の両方を解く必要があるのかな。
> 花子：$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの余りに着目したらどうかな。

$P(x)$ を $Q(x)$ で割ったときの余りを $R(x)$ とすると

$$R(x) = x^2 - \boxed{\text{ク}}\, x + \boxed{\text{ケ}}$$

であり

$$P(x) = Q(x)\left(x + \boxed{\text{コ}}\right) + R(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ。したがって，$P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ ならば，$R(\alpha) = \boxed{\text{サ}}$ である。このことにより，$P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ ならば

$$\alpha = \boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ス}}}\, i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

でなければならないことがわかる。

（数学Ⅱ第４問は次ページに続く。）

太郎：$P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α が求められたね。

花子：ちょっと待って。② の α の値で $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ になるのかな。

② の α が $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ を満たすかどうかを調べよう。

$Q(x)$ を $R(x)$ で割ると

$$Q(x) = R(x)\left(x - \boxed{\text{セ}}\right)$$

であるので，$Q(x)$ は $R(x)$ で割り切れる。よって，② の α について $Q(\alpha) = 0$ である。さらに ① により，$P(\alpha) = 0$ が成り立つ。

したがって，$P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α は $\boxed{\text{ソ}}$。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ 存在しない	① ちょうど 1 個存在する
② ちょうど 2 個存在する	③ ちょうど 3 個存在する
④ ちょうど 4 個存在する	

（数学Ⅱ第 4 問は次ページに続く。）

⑶　x の整式 $S(x)$，$T(x)$ を

$$S(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3,\quad T(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

と定めると，次の式が成り立つ。

$$S(x) = T(x)x + x^2 + \boxed{\text{タ}}\,x + \boxed{\text{チ}}$$

したがって，$S(\beta) = T(\beta) = 0$ を満たす複素数 β は $\boxed{\text{ツ}}$ 。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪　存在しない	①　ちょうど1個存在する
②　ちょうど2個存在する	③　ちょうど3個存在する
④　ちょうど4個存在する	