数　学　I

（全　問　必　答）

第１問 （配点　20）

〔１〕　a，b を定数とするとき，x についての不等式

$$|ax - b - 7| < 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a = -3$，$b = -2$ とする。① を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと

$$P = \left\{ \boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウエ}} \right\}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$，$\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない。

(2)　$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i)　$b = 1$ のとき，① を満たす整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(ii)　① を満たす整数が全部で $\left(\boxed{\text{オ}} + 1\right)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

（数学 I 第１問は６ページに続く。）

〔2〕 実数 x に関する三つの条件 p，q，r を

$$p : -1 \leqq x \leqq 5, \quad q : 3 < x < 6, \quad r : x \leqq 5$$

とする。

(1) 条件 p，q の否定を，それぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表すとき，次が成り立つ。

「p かつ q」は，r であるための $\boxed{キ}$。

「$\overline{p}$ かつ q」は，r であるための $\boxed{ク}$。

「p または $\overline{q}$」は，r であるための $\boxed{ケ}$。

$\boxed{キ}$ ～ $\boxed{ケ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない
① 十分条件であるが，必要条件ではない
② 必要十分条件である
③ 必要条件でも十分条件でもない

（数学Ⅰ第１問は次ページに続く。）

⑵　定数 a を正の実数とし

$$(ax-2)(x-a-1) \leqq 0$$

を満たす実数 x 全体の集合を A とする。

集合 A は，a の値を三つの場合に分けて考えると

- $0 < a <$ $\boxed{コ}$ のとき，$A = \left\{ x \,\middle|\, \boxed{サ} \leqq x \leqq \boxed{シ} \right\}$
- $a =$ $\boxed{コ}$ のとき，$A = \left\{ \boxed{ス} \right\}$
- $\boxed{コ} < a$ のとき，$A = \left\{ x \,\middle|\, \boxed{シ} \leqq x \leqq \boxed{サ} \right\}$

である。

$\boxed{サ}$，$\boxed{シ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $a-1$	① $a+1$	② $\dfrac{1}{a}$	③ $\dfrac{2}{a}$	④ $2a$

集合 B を

$$B = \{x \mid x\text{ は「}p\text{ かつ }q\text{」を満たす実数}\}$$

とするとき，$A \cap B$ が空集合となる a の値の範囲は

$$\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}} \leqq a \leqq \boxed{タ}$$

である。

第2問 (配点 30)

平面上に2点A，Bがあり，AB = 8である。直線AB上にない点Pをとり，△ABPをつくり，その外接円の半径をRとする。

太郎さんは，図1のように，コンピュータソフトを使って点Pをいろいろな位置にとった。

図1は，点Pをいろいろな位置にとったときの△ABPの外接円をかいたものである。

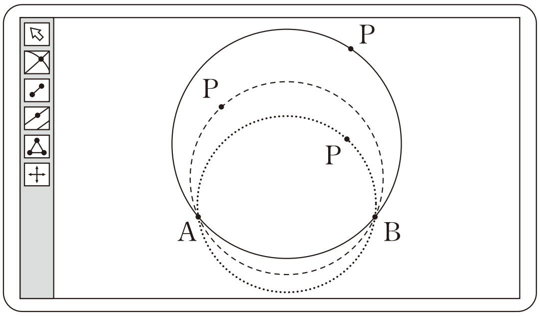

図 1

(1) 太郎さんは，点Pのとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題1**を考えることにした。

> **問題1** 点Pをいろいろな位置にとるとき，外接円の半径Rが最小となる△ABPはどのような三角形か。

正弦定理により，$2R = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$である。よって，$R$が最小となるのは$\angle\mathrm{APB} = \boxed{\text{イウ}}^\circ$の三角形である。このとき，$R = \boxed{\text{エ}}$である。

(数学 I 第2問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんは，図 2 のように，**問題 1** の点 P のとり方に条件を付けて，次の **問題 2** を考えた。

> **問題 2** 直線 AB に平行な直線を ℓ とし，直線 ℓ 上で点 P をいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径 R が最小となる $\triangle$ABP はどのような三角形か。

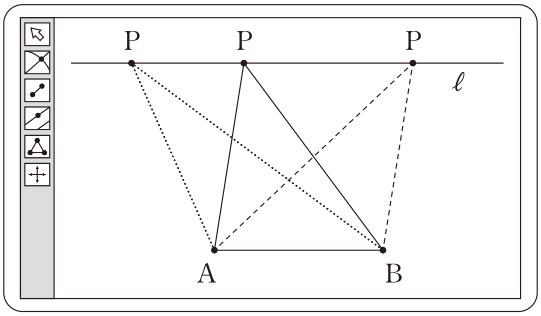

図 2

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

問題 2 の解決の構想

> **問題 1** の考察から，線分 AB を直径とする円を C とし，円 C に着目する。直線 ℓ は，その位置によって，円 C と共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線 AB と直線 ℓ との距離を h とする。直線 ℓ が円 C と共有点をもつ場合は，$h \leqq$ $\boxed{\text{オ}}$ のときであり，共有点をもたない場合は，$h >$ $\boxed{\text{オ}}$ のときである。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(i) $h \leqq$ オ のとき

直線 ℓ が円Cと共有点をもつので，R が最小となる $\triangle$ABPは，$h <$ オ のとき カ であり，$h =$ オ のとき直角二等辺三角形である。

(ii) $h >$ オ のとき

線分ABの垂直二等分線を m とし，直線 m と直線 ℓ との交点を P_1 とする。直線 ℓ 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin \angle AP_1B$ と $\sin \angle AP_2B$ の大小を考える。

$\triangle ABP_2$ の外接円と直線 m との共有点のうち，直線ABに関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると，$\angle AP_3B$ キ $\angle AP_2B$ である。また，$\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90^\circ$ より $\sin \angle AP_3B$ ク $\sin \angle AP_1B$ である。このとき

($\triangle ABP_1$ の外接円の半径) ケ ($\triangle ABP_2$ の外接円の半径)

であり，R が最小となる $\triangle$ABP は コ である。

カ ， コ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 鈍角三角形	① 直角三角形	② 正三角形
③ 二等辺三角形	④ 直角二等辺三角形	

キ ～ ケ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

(3) **問題 2** の考察を振り返って，h が次の値のとき，$\triangle$ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。ただし，線分 AB の中点 C に対して，$\angle \mathrm{ACP} \leqq 90^\circ$ とする。

(i) $h = \sqrt{7}$ のとき

$$\tan \angle \mathrm{ACP} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}, \quad \mathrm{AP} = \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$$

$$\cos \angle \mathrm{APC} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}, \quad \cos \angle \mathrm{PCB} = \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

(ii) $h = 8$ のとき，$\sin \angle \mathrm{APB} = \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であり，$R = \boxed{\text{ニ}}$ である。

第3問 （配点　30）

〔1〕 y は x の 2 次関数で，x^2 の係数は 1 とする。その 2 次関数のグラフを G とする。

(1) G が 2 点 $(2, 0)$，$(0, 3)$ を通るとき，G の方程式は

$$y = x^2 - \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \boxed{\text{ウ}}$$

である。

(2) a を実数とする。

G が 2 点 $(2, 0)$，$(0, a)$ を通るとき，G の頂点を (p, q) とすると

$$p = \frac{a + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \qquad q = -\frac{\left(a - \boxed{\text{カ}}\right)^2}{\boxed{\text{キク}}}$$

である。

また，

$$1 \leqq p \leqq 2 \quad \text{かつ} \quad -\frac{9}{4} \leqq q \leqq -\frac{1}{4}$$

であるとき，a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{コ}}$$

である。

（数学 I 第 3 問は 14 ページに続く。）

〔２〕 花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。二人は１皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，１皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

１皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

⑴ まず，二人は，上の表から，１皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が１皿あたりの価格の１次関数で表されると仮定した。このとき，１皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は

$$\boxed{\text{サシス}} - x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

と表される。

⑵ 次に，二人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，１皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と１皿あたりの材料費の積になるね。

（数学 I 第３問は次ページに続く。）

二人は，次の三つの条件のもとで，１皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

（条件１） １皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として ① を用いる。

（条件２） 材料は，① により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

（条件３） １皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$$y = -x^2 + \boxed{\text{セソタ}}\,x - \boxed{\text{チ}} \times 10000 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

である。

⑶ 太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。② を用いて考えると，利益が最大になるのは１皿あたりの価格が $\boxed{\text{ツテト}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{ナニヌネ}}$ 円である。

⑷ 花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。② を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる１皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ノハヒ}}$ 円となる。

第4問 （配点　20）

総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また，外務省では旅券(パスポート)を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口 1 万人あたりの外国人人口(以下，外国人数)，人口 1 万人あたりの小学校児童数(以下，小学生数)，また，日本人 1 万人あたりの旅券を取得した人数(以下，旅券取得者数)を，それぞれ計算した。

(1) 図 1 は，2010 年における 47 都道府県の，外国人数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

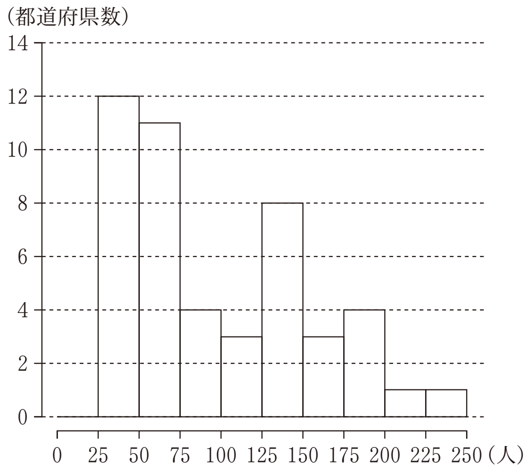

図 1　2010 年における外国人数のヒストグラム

(出典：総務省の Web ページにより作成)

(数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。)

下の二つは図1のヒストグラムに関する記述である。ただし，2010年における47都道府県の外国人数の平均値は96.4であった。

- 中央値と $\boxed{ア}$ は同じ階級に含まれる。
- 第1四分位数，$\boxed{イ}$ および $\boxed{ウ}$ は同じ階級に含まれる。

$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{ウ}$ の解答群（$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ については，解答の順序は問わない。）

⓪ 最小値	① 最大値	② 第3四分位数
③ 最頻値	④ 平均値	

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

⑵　図2は，2010年における47都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

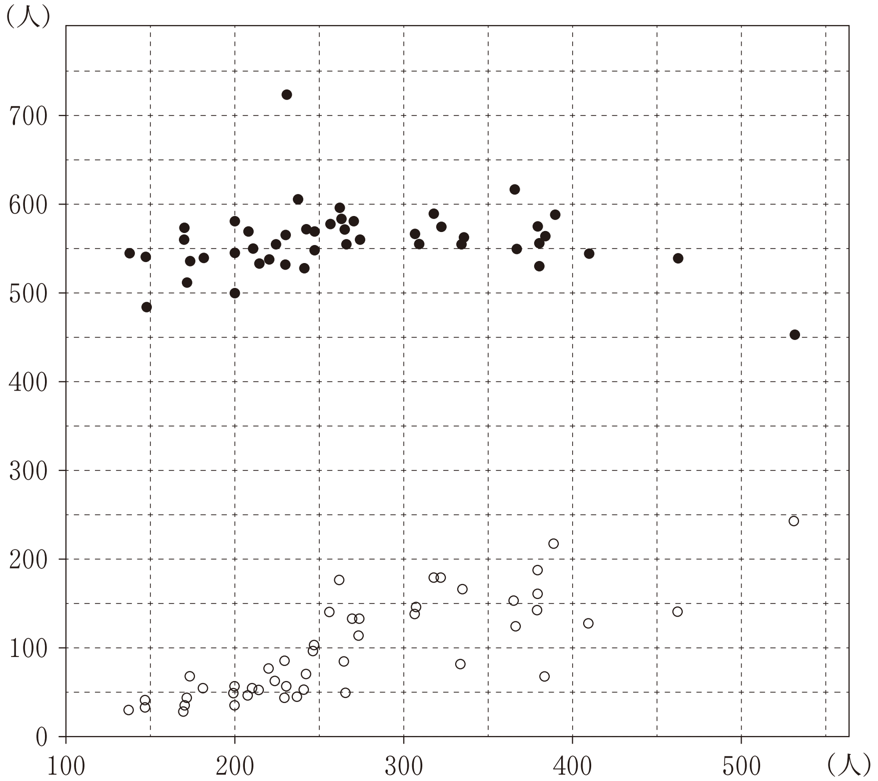

図2　2010年における，旅券取得者数と小学生数の散布図(黒丸)，
旅券取得者数と外国人数の散布図(白丸)

(出典：外務省，文部科学省および総務省のWebページにより作成)

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図２の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

（数学Ｉ第４問は次ページに続く。）

(3)　一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	f_3	f_4	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + \cdots + x_k f_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が h のときは

$$x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_1 + 2h,\ x_4 = x_1 + 3h,\ \cdots,\ x_k = x_1 + (k-1)h$$

に注意すると

$$\bar{x} = \boxed{\text{オ}}$$

と変形できる。

$\boxed{\text{オ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{x_1}{n}(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_k)$

① $\dfrac{h}{n}(f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + \cdots + kf_k)$

② $x_1 + \dfrac{h}{n}(f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_k)$

③ $x_1 + \dfrac{h}{n}\{f_2 + 2f_3 + 3f_4 + \cdots + (k-1)f_k\}$

④ $\dfrac{1}{2}(f_1 + f_k)x_1 - \dfrac{1}{2}(f_1 + kf_k)$

（数学 I 第 4 問は次ページに続く。）

図 3 は，2008 年における 47 都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

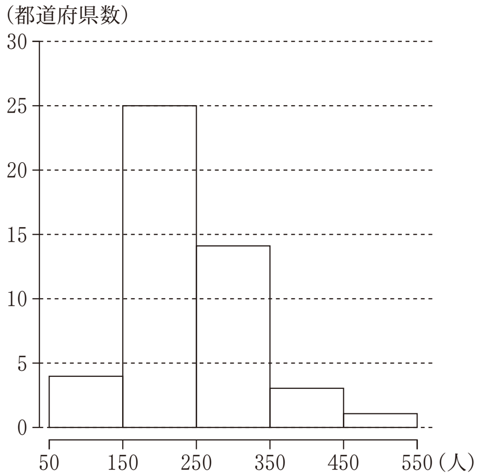

図 3　2008 年における旅券取得者数のヒストグラム
(出典：外務省の Web ページにより作成)

図 3 のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\bar{x}$ は小数第 1 位を四捨五入すると $\boxed{\text{カキク}}$ である。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

(4) 一般に，度数分布表

階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n

が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \overline{x})^2 f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 f_2 + \cdots + (x_k - \overline{x})^2 f_k\right\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1{}^2 f_1 + x_2{}^2 f_2 + \cdots + x_k{}^2 f_k) - 2\overline{x} \times \boxed{\text{ケ}} + (\overline{x})^2 \times \boxed{\text{コ}}\right\}$$

と変形できるので

$$s^2 = \frac{1}{n}(x_1{}^2 f_1 + x_2{}^2 f_2 + \cdots + x_k{}^2 f_k) - \boxed{\text{サ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

である。

$\boxed{\text{ケ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ n	① n^2	② $\overline{x}$	③ $n\overline{x}$	④ $2n\overline{x}$
⑤ $n^2\overline{x}$	⑥ $(\overline{x})^2$	⑦ $n(\overline{x})^2$	⑧ $2n(\overline{x})^2$	⑨ $3n(\overline{x})^2$

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

図4は，図3を再掲したヒストグラムである。

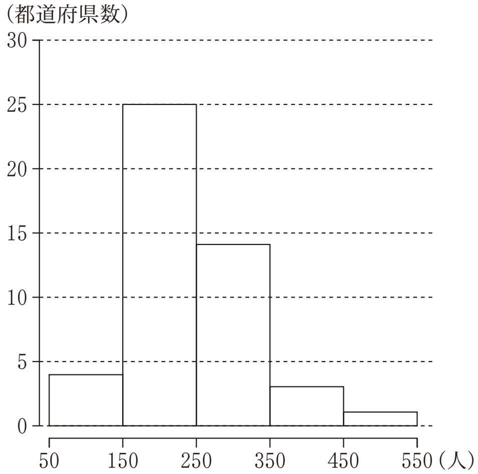

図4　2008年における旅券取得者数のヒストグラム

(出典：外務省のWebページにより作成)

図4のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\bar{x}$ は(3)で求めた $\boxed{\text{カキク}}$ である。$\boxed{\text{カキク}}$ の値と式①を用いると，分散 s^2 は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ については，最も近いものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ 3900	① 4900	② 5900	③ 6900
④ 7900	⑤ 8900	⑥ 9900	⑦ 10900