数学Ⅲ　式と曲線

~高校数学のまとめ~

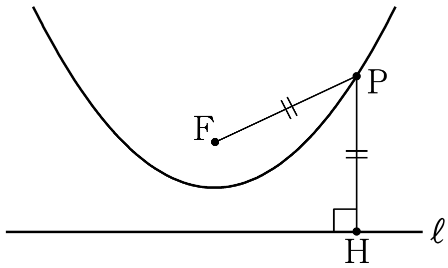
教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

放物線

平面上で

定点 F と F を通らない定直線 ℓ から等距離にある点 P の軌跡

を **放物線**（ほうぶつせん）という.



すなわち

点 P から ℓ へ下ろした垂線を PH として

$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ を満たす点 P の軌跡を放物線という.

このとき 点 F を **焦点**（しょうてん）といい, 直線 ℓ を **準線**（じゅんせん）という.

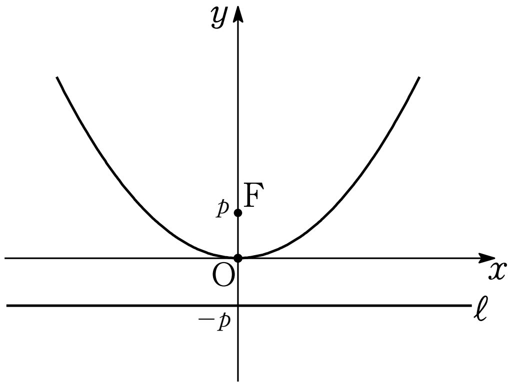
放物線の標準形とグラフ Ⅰ

座標平面で

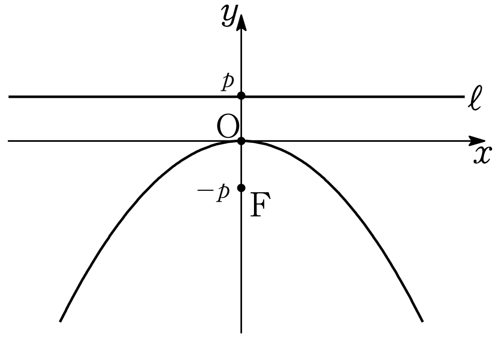
$$x^2 = 4py \ (p \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり，次のような概形になる．

〔$p > 0$ のとき〕



〔$p < 0$ のとき〕



このグラフについて

1. 頂点は $(0,\ 0)$
2. 焦点は $\mathrm{F}(0,\ p)$
3. 準線 ℓ の方程式は $y = -p$
4. 軸の方程式は $x = 0$（y 軸）
5. $\begin{cases} \text{下に凸} & (p > 0) \\ \text{上に凸} & (p < 0) \end{cases}$
6. この放物線上の点を P とし，点 P から準線 ℓ へ垂線 PH を下ろすと

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH} \ \text{（定義）}$$

㊟考 この放物線上の点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とし，点 P から準線 ℓ へ垂線 PH を下ろすと

$$\mathrm{PF} = \sqrt{X^2 + (Y-p)^2}$$

$$\mathrm{PH} = |Y - (-p)| = |Y + p|$$

$\mathrm{PF} = \mathrm{PH} \iff \mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ であるから $X^2 + (Y-p)^2 = (Y+p)^2$

よって $X^2 = 4pY$

㊟補 $x^2 = 4py$ を放物線の方程式の標準形という．

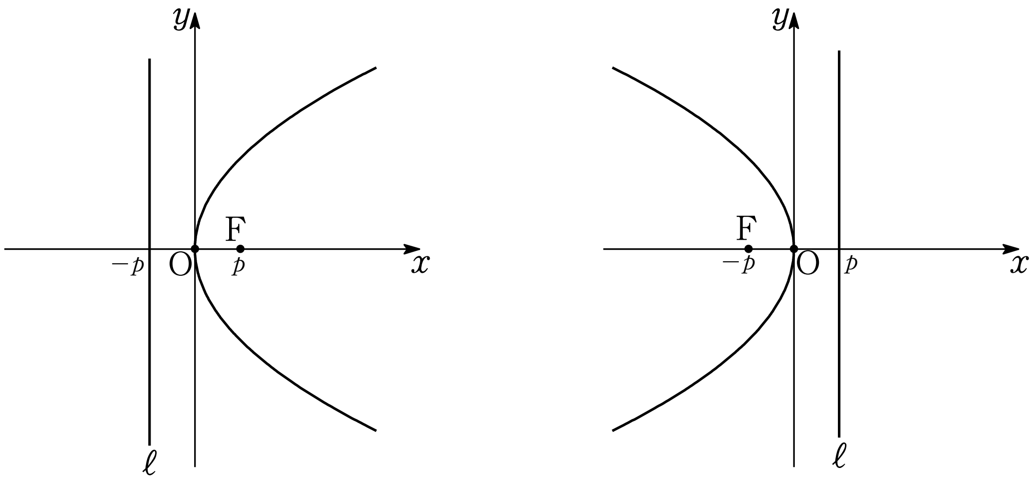
放物線の標準形とグラフ II

座標平面で

$$y^2 = 4px\ (p \neq 0)$$

のグラフは **放物線** であり，次のような概形になる．

〔$p > 0$ のとき〕　　〔$p < 0$ のとき〕



このグラフについて

$\boxed{1}$ 頂点は $(0,\ 0)$

$\boxed{2}$ 焦点は $\mathrm{F}(p,\ 0)$

$\boxed{3}$ 準線 ℓ の方程式は $x = -p$

$\boxed{4}$ 軸の方程式は $y = 0$ (x 軸)

$\boxed{5}$ x 軸方向に対して $\begin{cases} \text{下に凸} & (p > 0) \\ \text{上に凸} & (p < 0) \end{cases}$

$\boxed{6}$ この放物線上の点を P とし，点 P から準線 ℓ へ垂線 PH を下ろすと

$$\mathrm{PF} = \mathrm{PH}\ \text{（定義）}$$

㊔ この放物線上の点を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とし，点 P から準線 ℓ へ垂線 PH を下ろすと

$$\mathrm{PF} = \sqrt{(X-p)^2 + Y^2}$$
$$\mathrm{PH} = \left|X - (-p)\right| = \left|X + p\right|$$

$\mathrm{PF} = \mathrm{PH} \iff \mathrm{PF}^2 = \mathrm{PH}^2$ であるから $(X-p)^2 + Y^2 = (X+p)^2$

よって $Y^2 = 4pX$

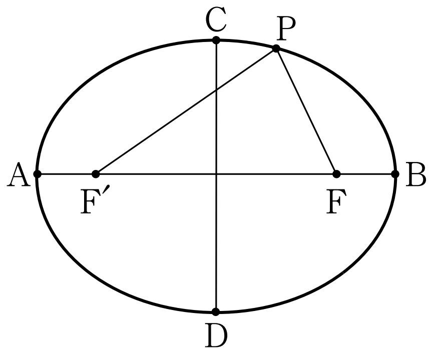
㊟ $y^2 = 4px$ を放物線の方程式の標準形という．

楕円

平面上で

異なる2つの定点FとF'からの距離の和が一定である点Pの軌跡

を 楕円(だえん) という．



すなわち

$$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = (\text{定数})$$

をみたす点Pの軌跡を楕円 という．

ただし $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' > \mathrm{FF}'$ とする．

このとき 点F，F' を 焦点 という．

また，右図の4点A，B，C，Dを楕円の頂点といい

線分ABを 長軸(ちょうじく) といい，線分CDを 短軸(たんじく) という．

㊊ $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = (\text{長軸の長さ})$

㊊ $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = \mathrm{FF}'$ となる点Pの軌跡は 線分FF' となる．

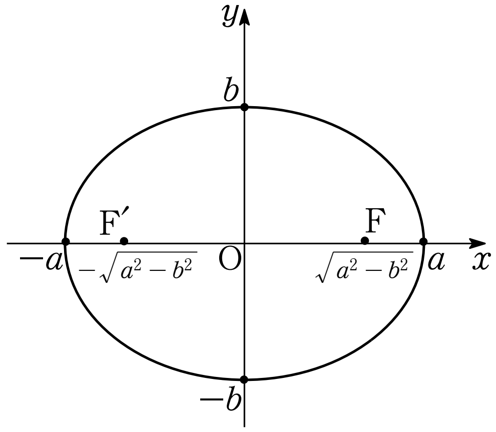
$\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' < \mathrm{FF}'$ となる点Pは存在しない．

楕円の標準形とグラフ Ⅰ

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

のグラフは **楕円** であり，次のような概形となる.



このグラフについて

1. 中心は $(0,\ 0)$
2. 焦点は $\left(\pm\sqrt{a^2-b^2}\ ,\ 0\right)$
3. 頂点は $(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$
4. 長軸の長さは $2a$
5. 短軸 の長さは $2b$
6. この楕円上の点を P とし，2 つの焦点を F．F′ とすると

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a\ (\text{長軸の長さ})$$

㊟補 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を楕円の方程式の標準形という.

㊟考 $\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$ ……①

F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ $(c>0)$ とする.

$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}>\mathrm{FF'}=2|c|$ なので　$a>c>0$

P$(X,\ Y)$ とおくと ① より　$\sqrt{(X-c)^2+Y^2}+\sqrt{(X+c)^2+Y^2}=2a$

すなわち　$\sqrt{(X-c)^2+Y^2}=2a-\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$

両辺正より 2 乗して整理すると　$a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}=a^2+cX$

$X\geqq-\dfrac{a^2}{c}>-a$ のもとで両辺 2 乗しても同値で　$(a^2-c^2)X^2+a^2Y^2=a^2(a^2-c^2)$

$\sqrt{a^2-c^2}=b$ とおくと　$c=\sqrt{a^2-b^2}$

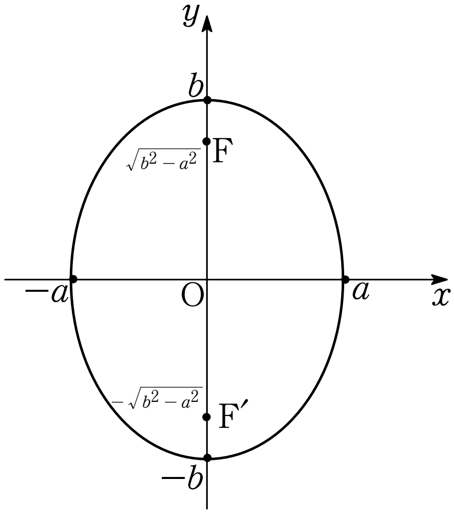
$b^2X^2+a^2Y^2=a^2b^2$　すなわち　$\dfrac{X^2}{a^2}+\dfrac{Y^2}{b^2}=1$

楕円の標準形とグラフ Ⅱ

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>a>0)$$

のグラフは **楕円** であり，次のような概形となる.



このグラフについて

$\boxed{1}$ 中心は $(0,\ 0)$

$\boxed{2}$ 焦点は $\left(0,\ \pm\sqrt{b^2-a^2}\ \right)$

$\boxed{3}$ 頂点は $(\pm a,\ 0)$，$(0,\ \pm b)$

$\boxed{4}$ 長軸の長さは $2b$

$\boxed{5}$ 短軸 の長さは $2a$

$\boxed{6}$ この楕円上の点を P とし，2 つの焦点を F．F′ とすると

$$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2b \ (\text{長軸の長さ})$$

㊟補 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を楕円の方程式の標準形という.

双曲線

平面上で

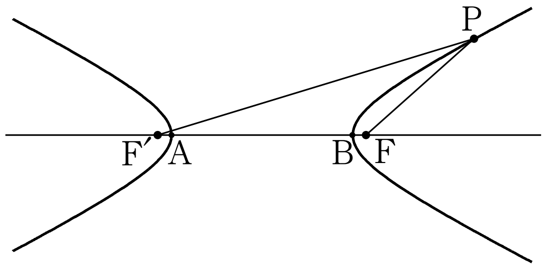
異なる 2 つの定点 F と F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡

を **双曲線**（そうきょくせん） という．

すなわち

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=(\text{定数})$$

をみたす点 P の軌跡を双曲線 という．



このとき 点 F，F′ を **焦点** という．

また，右図の 2 点 A，B を双曲線の頂点といい，直線 AB を **主軸**（しゅじく） という．

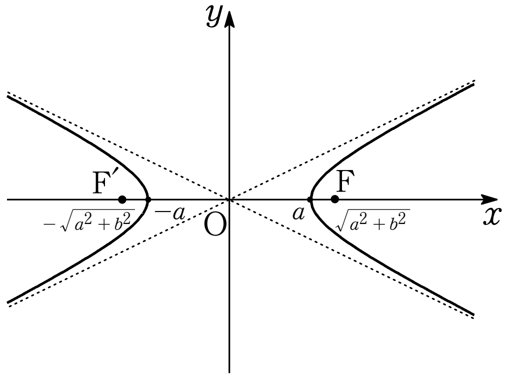
㊓ $|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=(\text{頂点間の距離})$

双曲線の標準形とグラフ Ⅰ

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

のグラフは **双曲線** であり，次のような概形となる．



このグラフについて

1. 中心は $(0,\ 0)$
2. 焦点は $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$
3. 頂点は $(\pm a,\ 0)$
4. 頂点間の距離は $2a$
5. 主軸の方程式は $y=0$ (x 軸)
6. 漸近線 の方程式は $y=\pm\dfrac{b}{a}x$
7. この双曲線上の点を P とし，2 つの焦点を F．F′ とすると

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a\ (\text{頂点間の距離})$$

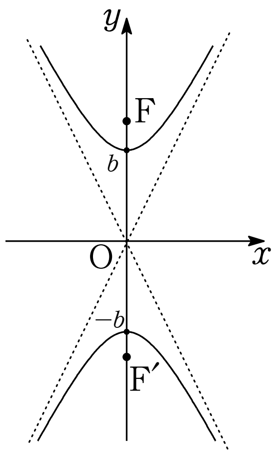
㊖ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を双曲線の方程式の標準形という．

双曲線の標準形とグラフ II

座標平面で

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0)$$

のグラフは **双曲線** であり，次のような概形となる．



このグラフについて

$\boxed{1}$ 中心は $(0,\ 0)$

$\boxed{2}$ 焦点は $\left(0,\ \pm\sqrt{a^2+b^2}\ \right)$

$\boxed{3}$ 頂点は $(0,\ \pm b)$

$\boxed{4}$ 頂点間の距離は $2b$

$\boxed{5}$ 主軸の方程式は $x=0$ (y 軸)

$\boxed{6}$ **漸近線** の方程式は $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

$\boxed{7}$ この双曲線上の点を P とし，2 つの焦点を F．F′ とすると

$$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2b \text{（頂点間の距離）}$$

㊓ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を双曲線の方程式の標準形という．

双曲線の漸近線

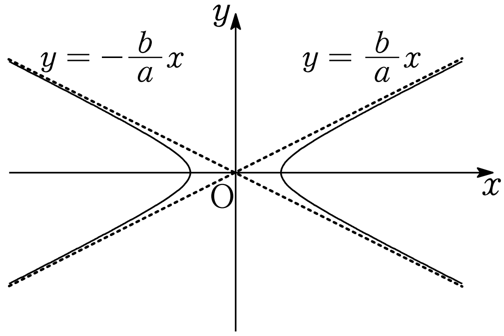
双曲線には漸近線が 2 本存在する.

とくに

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

の漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$



㊂ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \iff \dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{b^2}{x^2}$

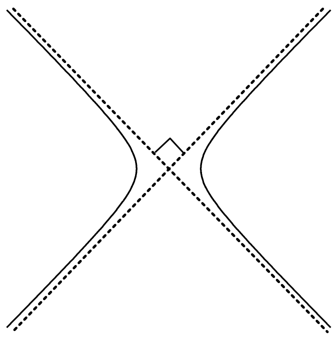
これより $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y^2}{x^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{b^2}{x^2}\right)=0$

漸近線の方程式は $\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{b^2}{a^2}=0$ すなわち $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

㊑ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$ の漸近線も $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

直角双曲線

直交する漸近線をもつ双曲線を **直角双曲線** という.



㊀ $x^2-y^2=a^2\ (a>0)$ の漸近線の方程式は $y=\pm x$ で直交する.

$y=\dfrac{1}{x}$ の漸近線の方程式は $y=0$ (x 軸), $x=0$ (y 軸) なので直交する.

直角双曲線に $x^2-y^2=a^2\ (a>0)$, $y=\dfrac{1}{x}$

原点が中心の楕円の接線公式

座標平面において

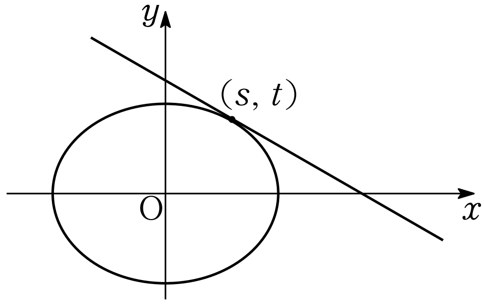
原点が中心の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1$$

を満たすもとで

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$



補 方程式で $x^2\to sx,\ y^2\to ty$ と置き換えると接線の方程式になる．

補 $a=b$ のときは円になる．

考 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ ……①

あ $t\fallingdotseq 0$ のとき

接線の方程式は傾きを m として　$y=m(x-s)+t$ ……②

② を ① へ代入して整理すると

$$(a^2m^2+b^2)x^2-2a^2m(ms-t)x-a^2(sm-t)^2-a^2b^2=0$$

この 2 次方程式が重解 $x=s$ をもつので $s=\dfrac{a^2m(ms-t)}{a^2m^2+b^2}$ すなわち $m=-\dfrac{b^2s}{a^2t}$

これを ② へ代入して整理すると $\dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{b^2}=\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}$
$=1$

い $t=0$ のとき

接線の方程式は $x=\pm a$

原点が中心の双曲線の接線公式

座標平面において

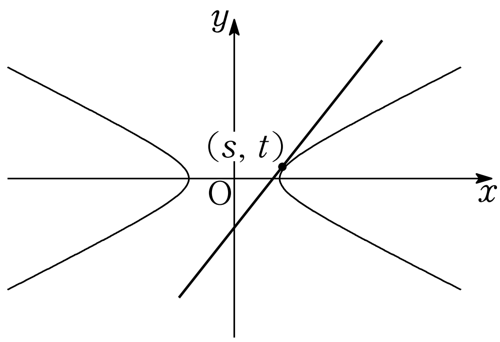
原点が中心の双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$$\frac{s^2}{a^2}-\frac{t^2}{b^2}=1$$

を満たすもとで

$$\frac{sx}{a^2}-\frac{ty}{b^2}=1$$



補 方程式で $x^2\to sx,\ y^2\to ty$ と置き換えると接線の方程式になる．

2次曲線

円，楕円，双曲線，放物線をまとめて **2次曲線** という．

㊋ 座標平面において，円，楕円，双曲線，放物線は x と y の2次式で表せる．

㊋ 円錐の切り口に出てくる図形なので円錐曲線ともいう．

原点が中心の2次曲線の接線公式

座標平面に原点が中心の2次曲線 $C : px^2+qy^2=1$

がある．

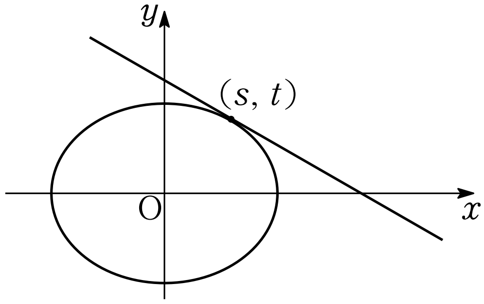
ただし p，q は C が円，楕円，双曲線のいずれかになるような定数とする．

C 上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$$ps^2+qt^2=1$$

を満たすもとで

$$psx+qty=1$$



㊋ C の方程式で $x^2 \to sx$，$y^2 \to ty$ と置き換えると接線の方程式になる．

㊔ C 上に点 $(s,\ t)$ があるので　$ps^2+qt^2=1$　……①

C を x で微分して　$2px+2qy\dfrac{dy}{dx}=0$　すなわち　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{px}{qy}$ $(y \neq 0)$

$t \neq 0$ のもとで 点 $(s,\ t)$ における接線の傾きは $-\dfrac{ps}{qt}$

接線の方程式は　$y=-\dfrac{ps}{qt}(x-s)+t$　すなわち　$psx+qty=ps^2+qt^2$

① から　$psx+qty=1$

これは $t=0$ のときも成り立つ．

標準形の放物線の接線公式

座標平面において

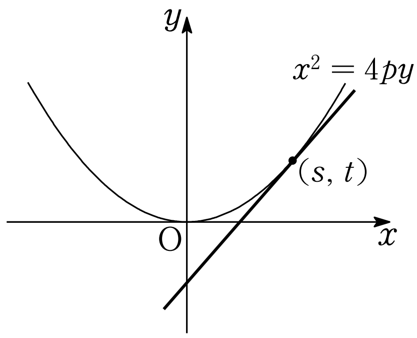
1 放物線 $x^2=4py$ $(p \neq 0)$

上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$s^2=4pt$

を満たすもとで

$$sx=2p(y+t)$$



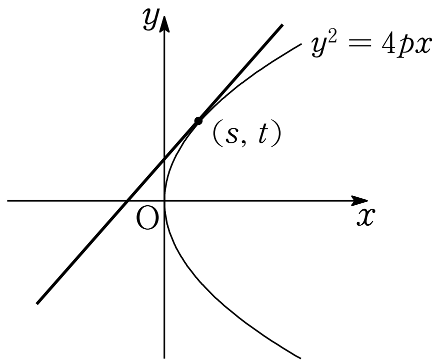
2 放物線 $y^2=4px$ $(p \neq 0)$

上の点 $(s,\ t)$ における接線の方程式は

$t^2=4ps$

を満たすもとで

$$ty=2p(x+s)$$



補 1 方程式で $x^2 \to sx$，$y \to \dfrac{y+t}{2}$ と置き換えると接線の方程式になる.

2 方程式で $x \to \dfrac{x+s}{2}$，$y^2 \to ty$ と置き換えると接線の方程式になる.

考 1 $x^2=4py$ を x で微分して $2x=4py'$ すなわち $y'=\dfrac{x}{2p}$

接線の方程式は $y=\dfrac{s}{2p}(x-s)+t$ すなわち $2py=sx-s^2+2pt$

$s^2=4pt$ を代入して $2py=sx-4pt+2pt$

よって $sx=2p(y+t)$

2 1 と同様.

曲線 $F(x,\ y)=0$ の平行移動

座標平面において，曲線 $F(x,\ y)=0$ を

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動された曲線の方程式は

$$F(x-p,\ y-q)=0$$

2 次曲線と直線の位置関係

座標平面において，2 次曲線と直線の位置関係は

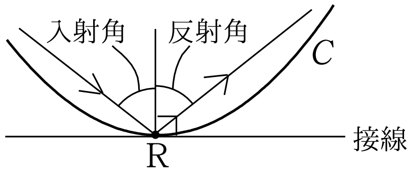
2 式を連立して 2 次方程式をつくり，実数解の個数を調べる．

光の反射

直進する光が曲線 C 上の点 R で反射した後，

再び直進するとき

点 R において，C の接線に対し，入射角と反射角が等しいとする．



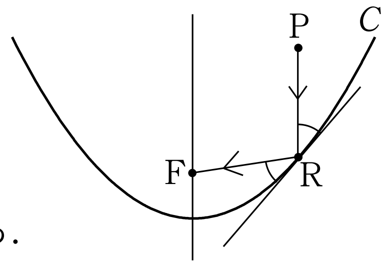
放物線の反射

放物線 C の焦点を F とする．

右の図のように

点 P から C の対称軸に平行な光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき，反射光は焦点 F に集まる．



㊟ パラボラアンテナ（parabola antenna）はこの性質を利用している．

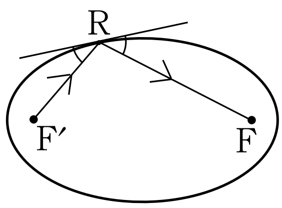
楕円の反射

楕円 C の 2 つの焦点を F，F′ とする．

右の図のように

1 つの焦点点 F′ から光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき，反射光は他方の焦点 F に集まる．



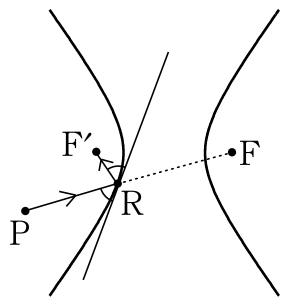
双曲線の反射

双曲線 C の 2 つの焦点を F，F′ とする．

右の図のように

点 P から 1 つの焦点 F に向かって光線が直進し

C 上の点 R で反射するとき，反射光は他方の焦点 F に集まる．

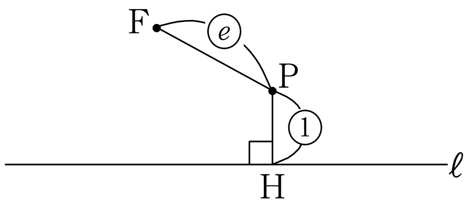


離心率

平面上で

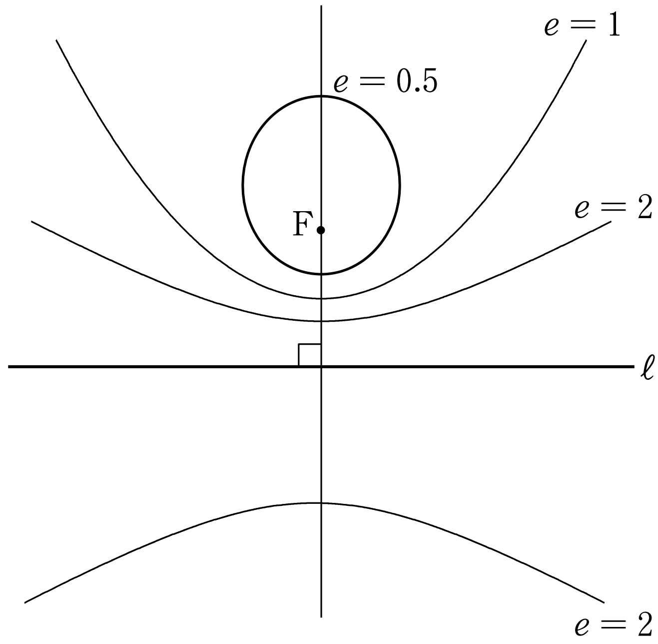
定点 F からの距離と F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点 P

つまり 点 P から定直線 ℓ へ垂線 PH へ下ろすと



$$\mathrm{PF}:\mathrm{PH}=e:1 \quad \text{すなわち} \quad e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$$

となる点 P の軌跡は次になる．



$\boxed{1}$ $0<e<1$ のとき

F を焦点の 1 つとする楕円

$\boxed{2}$ $e=1$ のとき

F を焦点，ℓ を準線とする放物線

$\boxed{3}$ $1<e$ のとき

F を焦点の 1 つとする双曲線

この e の値を 2 次曲線の離心率（りしんりつ） といい 定直線 ℓ を準線という．

㊫ e が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づく．

Ⓖ 離心率と 2 次曲線

楕円の準円

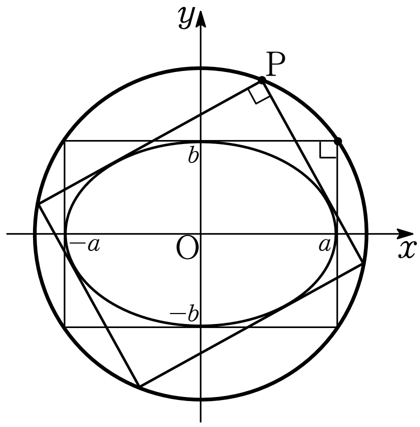
座標平面において

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

へ2本の直交する接線が引けるような点Pの軌跡は

円 $x^2+y^2=a^2+b^2$

この円を楕円の準円（じゅんえん）という．



㊂ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ ……①

P$(X,\ Y)$ とおく．

㋐ $X=\pm a$ のとき

P$(X,\ Y)$ は $x=\pm a$，$y=\pm b$ 上にあるから

$(X,\ Y)=(\pm a,\ \pm b)$ ……②

㋑ $X\neq\pm a$ のとき

点 P$(X,\ Y)$ を通る ① の接線の方程式は

y 軸に平行ではないので傾きを m として

$y=m(x-X)+Y$ ……③

③ を ① へ代入して $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{\{m(x-X)+Y\}^2}{b^2}=1$

両辺 a^2b^2 をかけて $b^2x^2+a^2\{mx+(Y-mX)\}^2=a^2b^2$

展開して整理して

$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2m(Y-mX)x+a^2\{(Y-mX)^2-b^2\}=0$ ……④

判別式を D として

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=a^4m^2(Y-mX)^2-a^2(b^2+a^2m^2)\{(Y-mX)^2-b^2\}\\&=a^2\{a^2m^2(Y-mX)^2-b^2(Y-mX)^2-a^2m^2(Y-mX)^2+b^4+a^2b^2m^2\}\\&=a^2b^2\{-(Y-mX)^2+b^2+a^2m^2\}\\&=a^2b^2\{(a^2-X^2)m^2+2XYm+b^2-Y^2\}\end{aligned}$$

③ と ① は接するから ④ が重解 x をもつので $D=0$ なので

$(a^2-X^2)m^2+2XYm+b^2-Y^2=0$ ……⑤

⑤ をみたす m を m_1，m_2 とすると解と係数の関係から

$m_1m_2=\dfrac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}$ ……⑥

m_1，m_2 は ③ を満たす傾きであり，これらは直交するので $m_1m_2=-1$ ……⑦

⑦ を ⑥ へ代入して $-1=\dfrac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}$ すなわち $X^2+Y^2=a^2+b^2$ ……⑧

②，⑧ より点 P の軌跡の方程式は 円 $\boldsymbol{x^2+y^2=a^2+b^2}$

Ⓖ 楕円の準円

双曲線の準円

座標平面において

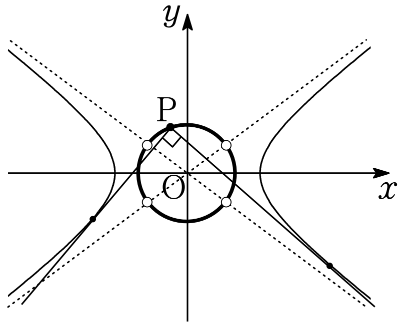
双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$

へ 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡は

円 $x^2+y^2=|a^2-b^2|$ $(a \neq b)$

ただし 漸近線 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 上の点は除く．

この円を双曲線の 準円（じゅんえん） という．



Ⓖ 双曲線の準円

放物線の準線（準円）

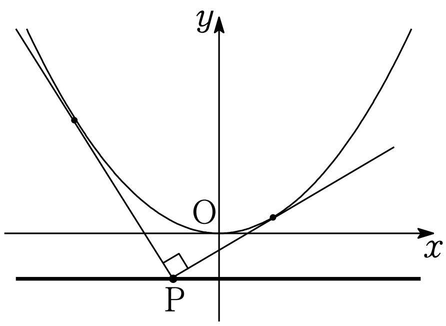
座標平面において

放物線 $x^2=4py$ $(p \neq 0)$

へ 2 本の直交する接線が引けるような点 P の軌跡は

直線 $y=-p$

この直線を放物線の 準線（じゅんせん） という．



㊟補 直線を半径が無限大の円と考えて準円ということもある．

㊟考 $x^2=4py$ $(p \neq 0)$ ……①

P$(X,\ Y)$ とおく．

P$(X,\ Y)$ を通る ① の接線の方程式は　$y=m(x-X)+Y$ ……②

② を ① へ代入して　$x^2=4p\{mx-(mX-Y)\}$

すなわち　$x^2-4mpx+4p(mX-Y)=0$

判別式を D として

$$\frac{D}{4}=4m^2p^2-4p(m(X)-Y)=4p\{pm^2-Xm+Y\}$$

② と ① は接するから $D=0$ なので

$$pm^2-Xm+Y=0$$

これをみたす m を m_1，m_2 とすると解と係数の関係から　$m_1m_2=\dfrac{Y}{p}$

m_1，m_2 は ② を満たす傾きであり，これらは直交するので　$m_1m_2=-1$

このことから　$\dfrac{Y}{p}=-1$　すなわち　$Y=-p$

よって，点 P の軌跡は **直線 $\boldsymbol{y=-p}$**

Ⓖ 放物線の準線

媒介変数表示

座標平面で，曲線 C が 1 つの変数 t によって

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

の形で表されるとき，これを

曲線 C の **媒介変数表示**（ばいかいへんすうひょうじ） といい 変数 t を **媒介変数**（ばいかいへんすう） という．

あるいは 曲線 C の**パラメータ表示** といい 変数 t を **パラメータ** という．

㊟補 曲線 C の媒介変数による表示の仕方は一通りではない．

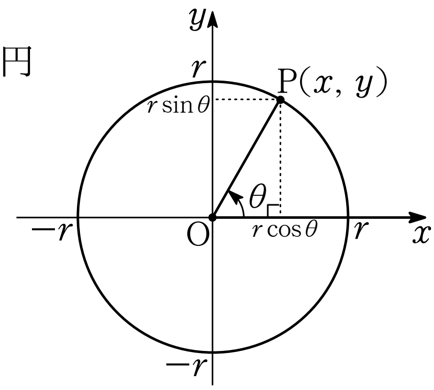
円の媒介変数表示

座標平面で，原点 O を中心とする半径 r $(r > 0)$ の円

$$x^2 + y^2 = r^2$$

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると 媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



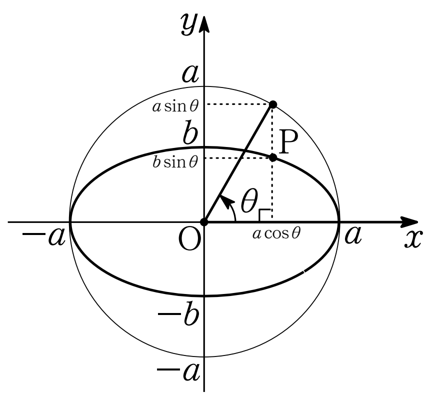
楕円の媒介変数表示

座標平面で，原点 O を中心とする楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0,\ b > 0)$$

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると 媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$



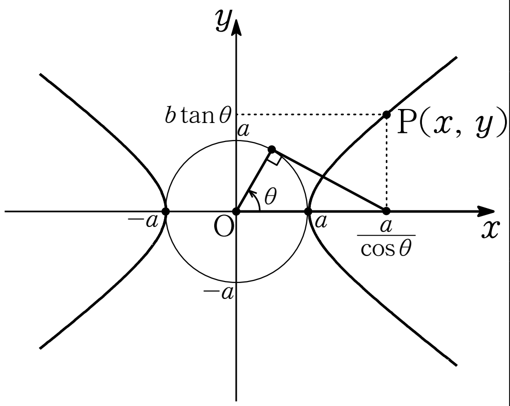
双曲線の媒介変数表示

座標平面で，原点Oを中心双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると 媒介変数を θ として

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$



直交座標

平面上に直交する x 軸，y 軸の 2 つの座標軸を定めると

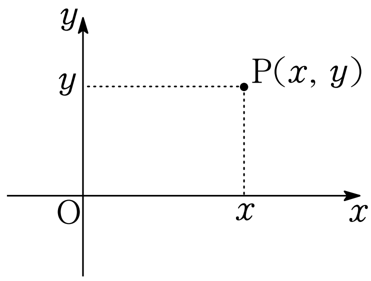
この平面上の任意の点 P は

　x 座標，y 座標の組 $(x,\ y)$

を定めることができる.

このとき，組 $(x,\ y)$ を点 P の **直交座標** という.

座標軸の交点を **原点**といい $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とかく.



極座標

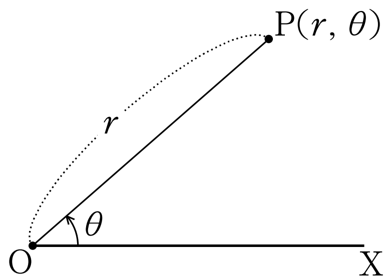
平面上に点 O と半直線 OX を定めると

この平面上の任意の点 P は

　O からの距離 r

　OX を始線とする角 θ の動径

で定めることができる.



このとき，組 $(r,\ \theta)$ を点 P の **極座標**（きょくざひょう） という.

定点 O を **極**（きょく）， 半直線 OX を **始線**（しせん）， 角 θ を **偏角**（へんかく） という.

ただし

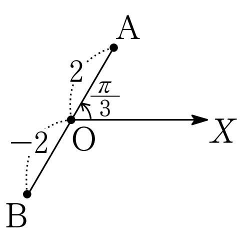
$r=0$ のとき θ を任意の数として極座標 $(0,\ \theta)$ は極 O を表す.

$r<0$ のとき 極座標 $(r,\ \theta)$ である点は極座標 $(-r,\ \theta+\pi)$ とする.

注意として θ は弧度法で表した一般角である.

㊞例 極座標で $\mathrm{A}\left(2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(-2,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ を図示すると右図.

$$\left(-2,\ \frac{\pi}{3}\right)=\left(2,\ \frac{4}{3}\pi\right)$$



極方程式

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いた式

$$r = f(\theta) \quad \text{または} \quad F(r,\ \theta) = 0$$

と表されるとき，その曲線の **極方程式**（きょくほうていしき） という．

直交座標と極座標の関係

座標平面において

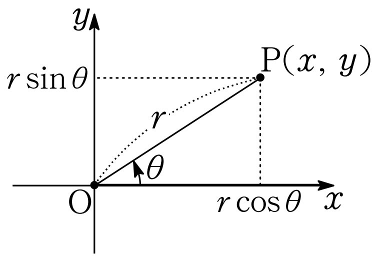
原点 O を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標を考えると

点 P の直交座標 $(x,\ y)$，極座標 $(r,\ \theta)$ の間には次のような関係が成り立つ．

1 $x = r\cos\theta$

2 $y = r\sin\theta$

3 $x^2 + y^2 = r^2$



㊟ 問題文などとくに条件が書かれてない場合は，この設定で考えてよい．

直交座標の方程式と極方程式の変換

1 直交座標の方程式 $F(x,\ y) = 0$ を極方程式で表すのは
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ x^2 + y^2 = r^2$ を代入して
r と θ の関係式にする．

2 極方程式 $G(r,\ \theta) = 0$ を直交座標の方程式で表わすのは
$r\cos\theta = x,\ r\sin\theta = y,\ r^2 = x^2 + y^2$ を代入して
x と y の関係式にする．

㊟例 1 直交座標の方程式 $x + y = 1$ を極方程式に表わすのは
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を代入して　$r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

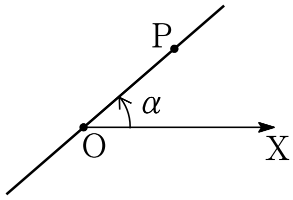
2 極方程式 $r = \cos\theta$ を直交座標の方程式で表わすのは
両辺 r をかけて　$r^2 = r\cos\theta$
$r^2 = x^2 + y^2,\ r\cos\theta = x$ を代入して　$x^2 + y^2 = x$

極を通る直線の極方程式

極Oを通り，始線とのなす角が α の直線の極方程式は

直線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$\theta=\alpha$$



補 $r=0$ として 点Pは極O

$r<0$ として 点Pは $(r,\ \alpha)=(-r,\ \alpha+\pi)$ となる点を表す.

極を通らない直線の極方程式

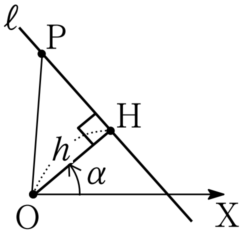
右の図のような極Oを通らない直線 ℓ の極方程式は

極Oから直線 ℓ へ垂線OHを下ろし

点Hの極座標を $(h,\ \alpha)$ とし

直線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$r\cos(\theta-\alpha)=h$$



考 $\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{OH}=h$，$\angle\mathrm{POH}=|\theta-\alpha|$

補 極方程式 $r\cos(\theta-\alpha)=h$ を直交座標の方程式で表すと

加法定理を用いて　$r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)=h$

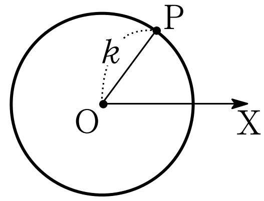
$r\cos\theta=x,\ r\sin\theta=y$ を代入して　$(\cos\alpha)x+(\sin\alpha)y=h$

極を中心とする円の極方程式

極 O を中心とする半径 k の円の極方程式は

円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$r = k$$



㊗ 極方程式 $r = k$ を直交座標の方程式で表すと

両辺 2 乗して　$r^2 = k^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ を代入して　$x^2 + y^2 = k^2$

極を通る円の極方程式

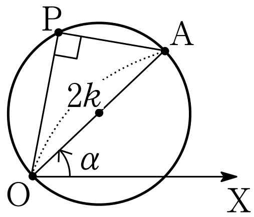
右の図のように極 O を通り半径 k の円の極方程式は

線分 OA が円の直径となるような点 A をとり

点 A の極座標を $(2k,\ \alpha)$ とし

円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$r = 2k\cos(\theta - \alpha)$$



㊫ $\mathrm{OP} = r$，$\mathrm{OA} = 2k$，$\angle\mathrm{AOP} = |\theta - \alpha|$

$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$, A ならば 線分 OA は直径なので　$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{2}$

$\theta = \alpha + \dfrac{\pi}{2}$ とすると $r = 2k\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ なので　$\mathrm{P} = \mathrm{O}$

$\theta = \alpha$ とすると　$r = 2k\cos 0 = 2k$ なので　$\mathrm{P} = \mathrm{A}$

㊗ 極方程式 $r = 2k\cos(\theta - \alpha)$ を直交座標の方程式で表すと

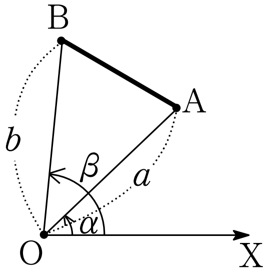
両辺 r をかけて加法定理を用いて　$r^2 = 2kr(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$

$r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ を代入して　$x^2 + y^2 = (2k\cos\alpha)x + (2k\sin\alpha)y$

すなわち　$(x - k\cos\alpha)^2 + (y - k\sin\alpha)^2 = k^2$

極座標での 2 点間の距離(余弦定理の一般化)

2 点 A，B の極座標をそれぞれ $(a,\ \alpha)$，$(b,\ \beta)$ とする.



このとき 2 点 A，B の距離は

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha)$$

すなわち

$$\mathrm{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha)}$$

これは α と β が一般角でも成り立ち 余弦定理 ということもある.

㋕ 2 点 AB を直交座標で表すと　$\mathrm{A}(a\cos\alpha,\ a\sin\alpha)$，$\mathrm{B}(b\cos\beta,\ b\sin\beta)$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= (b\cos\beta - a\cos\alpha)^2 + (b\sin\beta - a\sin\alpha)^2\\ &= b^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + a^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2ab(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)\\ &= b^2 + a^2 - 2ab\cos(\beta - \alpha)\end{aligned}$$

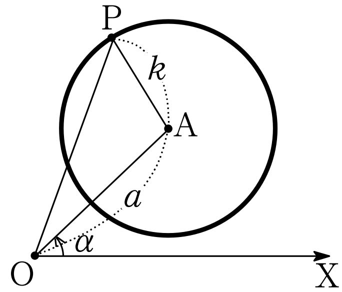
㊟ △OAB での余弦定理の一般化になっている.

極を通らない円の極方程式

中心の極座標が $(a,\ \alpha)$，半径 k の円の極方程式は

円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$k^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)$$



㋕ $\mathrm{OP} = r$，$\mathrm{OA} = a$，$\mathrm{AP} = k$，$\angle\mathrm{AOP} = |\theta - \alpha|$

△OAP に余弦定理を用いて　　$k^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)$

$\theta = \alpha$ とすると　$r = 2a\cos 0 = 2a$ なので　$\mathrm{P} = \mathrm{A}$

㊟ 極方程式 $k^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \alpha)$ を直交座標の方程式で表すと

加法定理を用いて　$k^2 = r^2 + a^2 - 2ar(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$

$k^2 = x^2 + y^2$，$r\cos\theta = x$，$r\sin\theta = y$ を代入して

$$k^2 = x^2 + y^2 + a^2 - (2a\cos\alpha)x - (2a\sin\alpha)y$$

すなわち　$(x - a\cos\alpha) + (y - a\sin\alpha)^2 = k^2$

極が焦点の標準形の放物線の極方程式

直交座標で

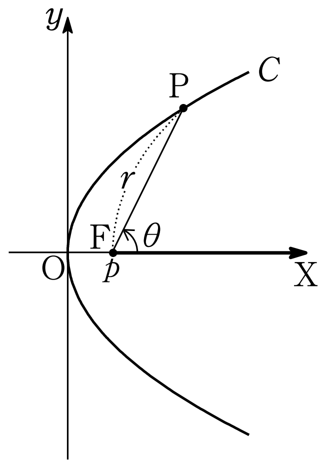
放物線 $C: y^2=4px\ (p>0)$ の焦点を $\mathrm{F}(p,\ 0)$ とする．

F を極，x 軸の正の部分の半直線を始線とする極座標

における C の極方程式は

C 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として

$$r=\frac{2p}{1-\cos\theta}$$



㊢ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{FP}}=(p+r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

C の準線を $\ell: x=-p$ とし，点 P から ℓ へ垂線 PH を下ろすと

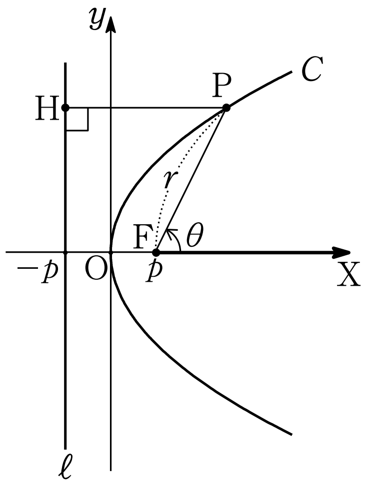
$\quad \mathrm{PH}=p+r\cos\theta-(-p)=2p+r\cos\theta$

放物線の定義より $\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ であるから

$\quad r=2p+r\cos\theta$ すなわち $(1-\cos\theta)r=2p$

点 P は始線上にはないから $\cos\theta\neq 1$

よって $r=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$



極が焦点の標準形の楕円の極方程式

直交座標で

楕円 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$

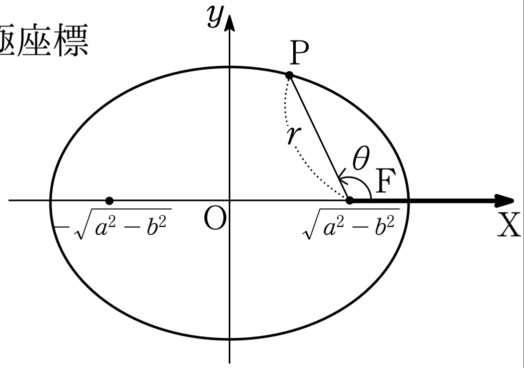
の焦点の 1 つを $\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\,0\right)$ とする．

F を極，x 軸の正の部分の半直線を始線とする極座標

における C の極方程式は

C 上の点 P の極座標を $(r,\,\theta)$ として

$$r=\frac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$$



㊟ もう 1 つの焦点を $\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2-b^2},\,0\right)$ とする．

$\mathrm{FF}'=2\sqrt{a^2-b^2}$

楕円の定義より $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$

$\mathrm{PF}=r$ なので $\mathrm{PF}'=2a-r$

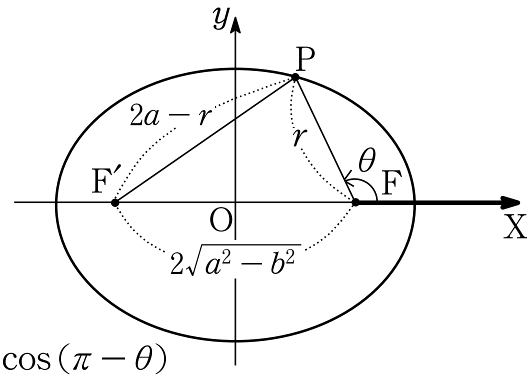
F′ の極座標は $\left(2\sqrt{a^2-b^2},\,\pi\right)$

$\triangle\mathrm{PFF}'$ に余弦定理を用いて

$$(2a-r)^2=r^2+\left(2\sqrt{a^2-b^2}\right)^2-2\cdot r\cdot 2\sqrt{a^2-b^2}\cos(\pi-\theta)$$

すなわち $4a^2-4ar+r^2=r^2+4(a^2-b^2)+4r\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta$

よって $r=\dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta}$



離心率と極座標

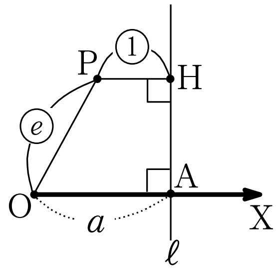
極座標において

極座標が $(a,\ 0)$ である点 A を通り，始線 OX に垂直な直線を定直線 ℓ とする．

極 O からの距離と定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点 P

つまり 点 P から定直線 ℓ へ垂線 PH へ下ろすと

$\mathrm{OP}:\mathrm{PH}=e:1$ すなわち $e=\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}$



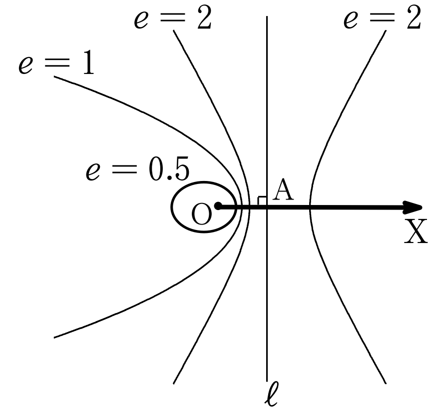
となる点 P の軌跡について

極方程式は $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$

直交座標での方程式は $(1-e^2)x^2+2e^2ax+y^2-e^2a^2=0$

$\boxed{1}$ $0<e<1$ のとき

O を焦点の 1 つとする楕円



$\boxed{2}$ $e=1$ のとき

O を焦点，ℓ を準線とする放物線

$\boxed{3}$ $1<e$ のとき

O を焦点の 1 つとする双曲線

この e の値を 2 次曲線の離心率（りしんりつ） といい 定直線 ℓ を準線という．

補 e が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づく．

考 直交座標では $\ell: x=a$，$\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\mathrm{OP}=r$，$\mathrm{PH}=|a-r\cos\theta|$

$\mathrm{OP}=e\mathrm{PH}$ より $r=e|a-r\cos\theta|$

r は負の値もとるので $r=e(a-r\cos\theta)$ すなわち $(1+e\cos\theta)r=ea$

よって，極方程式は $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$

また，直交座標で $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $\mathrm{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$，$\mathrm{PH}=|a-x|$

$\mathrm{OP}^2=e^2\mathrm{PH}^2$ より $x^2+y^2=e^2(a-x)^2$

よって，直交座標では $(1-e^2)x^2+2e^2ax+y^2-e^2a^2=0$

補 $r=\dfrac{ea}{e\cos\theta-1}$ と表すこともできるが

$(r,\ \theta)$ を $(-r,\ \theta+\pi)$ とおきかえると $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ になる．

つまり 極 O に関して対称になるので，同じ軌跡になる．

補 e が 0 に近いほど，点 P の軌跡は円に近づく．

