a を正の実数とする．xy 平面の放物線 $C: y=x^2$ 上に点 A$(-a,\, a^2)$ をとる．$s>0$ のとき，x 軸上から点 P$(s,\, 0)$ に対して，直線 AP と C の 2 つの交点のうち，A とは異なる交点を Q$(t,\, t^2)$ とする．Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を P$'(t,\, 0)$ とする．いま，x 軸上の点 P$_1(c,\, 0)$ $(c>0)$ から出発して，点 P に対して点 Q，P$'$ を定めたのと同じ方法で P$_1$ から点 Q$_1$，P$_2$ を定め，同様に P$_2$ から Q$_2$，P$_3$ を定め，この方法を繰り返して，P$_1$，P$_2$，P$_3$，$\cdots$ と Q$_1$，Q$_2$，Q$_3$，$\cdots$ を定める．次の問に答えよ．

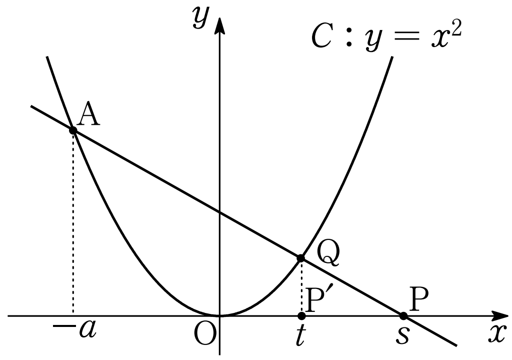
(1)　t を a と s を用いて表せ．

(2)　点 P$_n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ の x 座標を x_n とする．数列 $\{u_n\}$ を $u_n=\dfrac{1}{x_n}$ で定める．$\{u_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　直角三角形 P$_n$Q$_n$P$_{n+1}$ の面積を S_n で表す．自然数 r を選んで，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる．このような r の値とそのときの極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} n^r S_n$ を求めよ．

〔2005　神大 理系 前期〕

〔解答例〕



(1)　(AQ の傾き) = (AP の傾き) より

$$t-a=\frac{-a^2}{s+a}\quad すなわち\quad t=\frac{a(s+a)-a^2}{s+a}$$

よって $\boldsymbol{t=\dfrac{as}{s+a}}$

(2)　P$_n(x_n,\, 0)$ とすると　$x_1=c$　← P$_1$(c, 0)

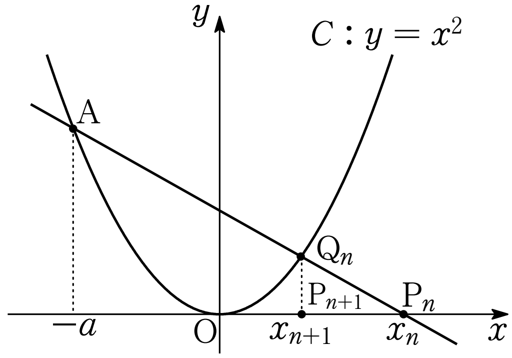
(1) で P を P$_n$，P$'$ を P$_{n+1}$ とすると　← (1) がヒントになっている!

$s=x_n$，$t=x_{n+1}$　なので

$$x_{n+1}=\frac{ax_n}{x_n+a}$$

ここで $a>0$ かつ $x_1=c>0$ より

帰納的に任意の自然数 n に対して $x_n>0$



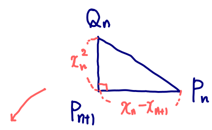
逆数をとり　$\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{x_n+a}{ax_n}$

$$=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}$$

$$u_n=\frac{1}{x_n}\quad\cdots\cdots①$$

で定めると　$u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{a}\quad\cdots\cdots②$

$\{u_n\}$ は初項 $u_1=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{c}$，公差 $\dfrac{1}{a}$ の等差数列より



$$u_n=\frac{1}{c}+\frac{n-1}{a}=\boldsymbol{\frac{n}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}$$

(3)　$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\cdot\mathrm{QP}_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n-x_{n+1}){x_{n+1}}^2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)\dfrac{1}{{u_{n+1}}^2}$　(∵①)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u_{n+1}-u_n}{u_nu_{n+1}}\cdot\frac{1}{{u_{n+1}}^2}=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{u_n{u_{n+1}}^3}\quad (∵②)$$

$$=\frac{1}{2a\left(\dfrac{n}{a}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)\left(\dfrac{n}{a}+\dfrac{1}{c}\right)^3}$$

← 分母は n の 4 次式!

$$\lim_{n\to\infty} n^r S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{r-4}}{2a\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{cn}-\dfrac{1}{an}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{cn}\right)}$$

← 分母・分子を $n^4 = n^3 \cdot n$ でわった！

$$= \begin{cases} r-4>0 \text{ のとき} & \text{発散} \\ r-4=0 \text{ のとき} & \dfrac{1}{2a\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right)^3} = \dfrac{a^3}{2} > 0 \\ r-4<0 \text{ のとき} & 0 \end{cases}$$

よって，正の実数値に収束するのは $\boldsymbol{r=4}$ のときで，極限値 $\boldsymbol{\dfrac{a^3}{2}}$