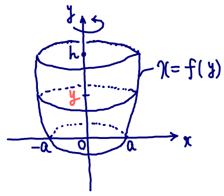
深さ h の容器がある．底は半径 $a\ (>0)$ の円板，側面は $x=f(y)$，$0 \leqq y \leqq h$ のグラフを y 軸のまわりに回転したものである．ただし，$f(y)$ は正の連続関数で $f(0)=a$ とする．この容器に単位時間あたり V(一定) の割合で水を入れたとき，T 時間後に一杯になり，しかも $t\ (<T)$ 時間後の水面の面積は $Vt+\pi a^2$ であった．関数 $f(y)$ を決定し，T を求めよ．

〔1995　京大 理系 前期〕

〔解答例〕



t 時間後の水面の高さを y とすると，水面の面積から

$$\pi \cdot \{f(y)\}^2 = Vt+\pi a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

単位時間あたり V(一定) の割合で水を入れるので，t 時間後の水量は

$$Vt = \int_0^y \pi\{f(u)\}^2\,du$$

← 回転体の体積
高さを y としたので，積分する変数は u とした

両辺を t で微分すると

$$V = \pi\{f(y)\}^2 \cdot \frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots ②$$

← 合成関数の微分　$z=\int_0^y \pi\{f(u)\}^2 du$ とおくと $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$$= (Vt+\pi a^2)\cdot\frac{dy}{dt} \quad (\because ①)$$

すなわち $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{V}{Vt+\pi a^2} \quad \cdots\cdots ②'$　← y を t で微分した形

両辺を t で積分すると

$t=0$ のとき 水が入ってないので高さ y は 0
$t=T$ のとき 水が一杯になるので高さ y は h

$$y = \log(Vt+\pi a^2)+C \quad (C \text{ は積分定数}) \cdots\cdots ③$$

$t=0$ のとき $y=0$ であるから　$0=\log \pi a^2 + C$　　$\therefore C = -\log \pi a^2$

③ より　$y = \log(Vt+\pi a^2) - \log \pi a^2$

$$= \log\frac{Vt+\pi a^2}{\pi a^2} \quad \cdots\cdots ④$$

$$= \log\frac{\{f(y)\}^2}{a^2} \quad (\because ①)$$

$\sim$ $e^y = \dfrac{\{f(y)\}^2}{a^2}$

すなわち　$\{f(y)\}^2 = a^2 e^y$

よって $f(y)>0$, $a>0$ であるから　$\boldsymbol{f(y) = a\,e^{\frac{y}{2}}}$

$t=T$ のとき $y=h$ であるから ④ より　$h = \log\dfrac{VT+\pi a^2}{\pi a^2}$

$\sim$ $e^h = \dfrac{VT+\pi a^2}{\pi a^2}$　$\times \pi a^2$
$\pi a^2 e^h = TV+\pi a^2$
$\pi a^2(e^h-1) = TV$

よって　$\boldsymbol{T = \dfrac{\pi a^2(e^h-1)}{V}}$

別　(③ を導く別の解法)

②′ より

$$1 = \frac{V}{Vt+\pi a^2}\cdot\frac{dt}{dy}$$

両辺を y で積分すると

$$\int dy = \int \frac{V}{Vt+\pi a^2}\cdot\frac{dt}{dy}\,dy$$

$$= \int \frac{V}{Vt+\pi a^2}dt$$

ゆえに　$y = \log(Vt+\pi a^2)+C$　(C は積分定数) ……③

㊉ （T を直接求める）

$$
\begin{aligned}
T &= \int_0^T dt \\
&= \int_0^h \frac{dt}{dy}\,dy \\
&= \int_0^h \frac{\pi\left\{f(y)\right\}^2}{V}\,dy \quad (\because ②) \\
&= \int_0^h \frac{\pi\left(ae^{\frac{y}{2}}\right)^2}{V}\,dy \\
&= \frac{\pi a^2}{V}\int_0^h e^y\,dy \\
&= \frac{\pi a^2}{V}\Big[\,e^y\,\Big]_0^h \\
&= \frac{\pi a^2(e^h-1)}{V}
\end{aligned}
$$

t	$0 \to T$
y	$0 \to h$

$\dfrac{dt}{dy} = \dfrac{\pi\{f(y)\}^2}{V}$

$f(y) = ae^{\frac{y}{2}}$