関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ で定める．

(1)　$y=f(x)$ の $x=1$ における法線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で求めた法線と x 軸および $y=f(x)$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

〔 解答例 〕

(1)　$f(0)=0$

$$f(1)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\,\frac{dt}{d\theta}d\theta \left(t=\tan\theta \text{ と置換} \quad \begin{array}{c||ccc} t & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}\right)$$

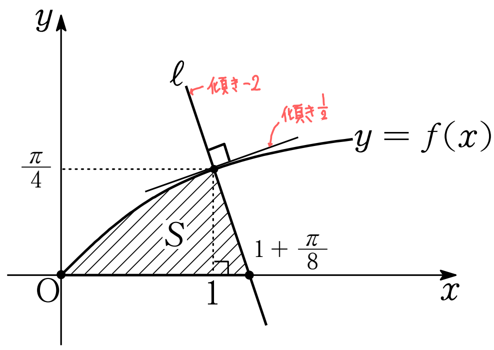
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$　より　$f'(1)=\dfrac{1}{2}$

$y=f(x)$ の $x=1$ における法線を ℓ とすると，

点 $\left(1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ を通り傾き -2 の直線だから

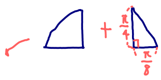
$$\boldsymbol{\ell : y=-2x+2+\frac{\pi}{4}}$$



(2)　$f'(x)>0$ なので $f(x)$ は単調増加．

ℓ で $y=0$ とすると $x=1+\dfrac{\pi}{8}$

求める面積を S とすると



$$S=\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\pi}{4}$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\Big[\,xf(x)\,\Big]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$（∵ 部分積分法）

$$=f(1)-\left[\,\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\log 2}{2}$$

よって　$\boldsymbol{S=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\log 2}{2}+\dfrac{\pi^2}{64}}$