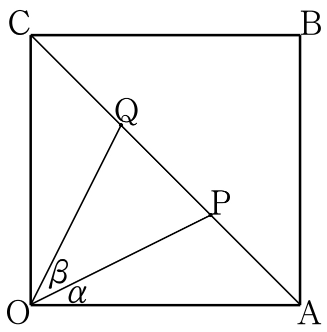
正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする．また，$\angle\mathrm{AOP} = \alpha$ $\angle\mathrm{POQ} = \beta$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ．

(2)　$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$ を示せ．

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR} = \alpha$ となるようにとる．このとき，比 AR : RC を求めよ．



〔解答例〕

座標軸の設定！

(1)　OA = OC = 3 としても一般性は保たれる．

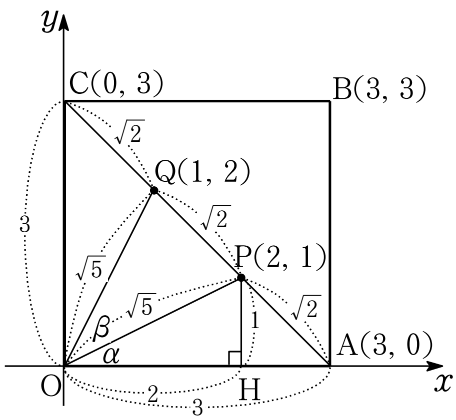
xy 平面で O(0, 0)，A(3, 0)，B(3, 3)，C(0, 3) とすると P(2, 1)，Q(1, 2)

$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \sqrt{5}$，$\mathrm{AP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{QC} = \sqrt{2}$

△OAP，△OPQ にそれぞれ余弦定理を用いて

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{3^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\boldsymbol{\cos\beta} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$



〔別解例〕

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2, 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1, 2)$　より

← ベクトルの内積

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \frac{3\cdot 2}{3\cdot\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\boldsymbol{\cos\beta} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

〔別解例 2〕

P から x 軸へ垂線 PH を下ろすと H(2, 0)

$\mathrm{OH} = 2$，$\mathrm{PH} = 1$，$\mathrm{OP} = \sqrt{5}$

よって　$\boldsymbol{\cos\alpha} = \dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

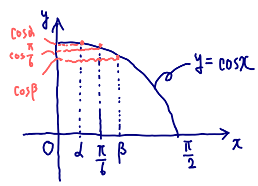
$\angle\mathrm{COQ} = \alpha$，$\angle\mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{2}$　より　$2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\boldsymbol{\cos\beta} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{4}{5}}$$

(2)　$\cos\alpha - \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{2\sqrt{5}} > 0$

$\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{5\sqrt{3}-8}{10} = \dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{64}}{10} > 0$



ここで　$\cos\alpha > \cos\dfrac{\pi}{6} > \cos\beta >$　かつ　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$　かつ　$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$

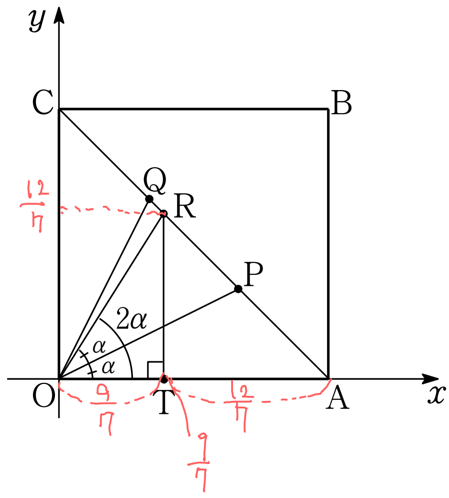
よって　$\alpha < \dfrac{\pi}{6} < \beta$　である．(証明終)

↖ $y = \cos x$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ は単調減少

(3)　$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$

線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR} = \alpha$ となるようにとると，$\angle\mathrm{AOR} = 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$



OR : $y = \dfrac{4}{3}x$

AC : $y = -x + 3$

これらを連立して，$\mathrm{R}\left(\dfrac{9}{7},\ \dfrac{12}{7}\right)$

R から x 軸へ垂線 RT を下ろすと $\mathrm{T}\left(\dfrac{9}{7},\ 0\right)$

$\mathrm{OT} = \dfrac{9}{7}$，$\mathrm{TA} = 3 - \dfrac{9}{7} = \dfrac{12}{7}$

よって　AR : RC = AT : TO = **4 : 3**

〔別解例〕

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = t : (1-t)\ (0 < t < 1) \quad \cdots\cdots(☆)$$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)(3,\ 0) + t(0,\ 3) = \big(3(1-t),\ 3t\big)$$

これより直線 OR の傾きは $\dfrac{t}{1-t}$

これと直線 OR の傾きが $\dfrac{4}{3}$ となることから

$$\frac{t}{1-t} = \frac{4}{3} \quad \text{すなわち} \quad 3t = 4 - 4t \qquad \therefore t = \frac{4}{7}$$

よって，(☆) より　$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = \dfrac{4}{7} : \dfrac{3}{7} =$ **4 : 3**

〔別解例 2〕

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = 3\sqrt{(1-t)^2 + t^2} = 3\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角が 2α なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|\cos 2\alpha$$

これより　$9(1-t) = 3\cdot 3\sqrt{2t^2 - 2t + 1}\cdot\dfrac{3}{5}$

両辺 $\dfrac{5}{9}$ をかけて　$5(1-t) = 3\sqrt{2t^2 - 2t + 1}$

両辺正より 2 乗して整理すると　$7t^2 - 32t + 16 = 0$

すなわち　$(t-4)(7t-4) = 0$

$0 < t < 1$ より　$t = \dfrac{4}{7}$

よって，(☆) より　$\mathrm{AR} : \mathrm{RC} = \dfrac{4}{7} : \dfrac{3}{7} =$ **4 : 3**