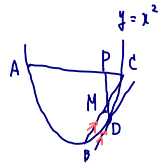
実数 a, c は $a < c$ を満たすとし，実数 b を $b = \dfrac{a+c}{2}$ により定める．xy 平面上の 3 点 A, B, C を，それぞれの座標が $(a,\ a^2)$, $(b,\ b^2)$, $(c,\ c^2)$ であるものとする．また，曲線 $y = x^2$ 上の点で，その点における接線の傾きが直線 BC の傾きに等しい点を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点を M，線分 AC と直線 MD との交点を P とする．このとき，線分 PM と線分 MD の長さの比 PM : MD を求めよ．

(2)　△ABC と △BCD の面積の比 △ABC : △BCD を求めよ．

〔2022　大阪公立大 理系 前期〕

〔解答例〕



(1)　直線 BC の傾きは $b+c$

$$\mathrm{BC} : y = (b+c)x - bc$$

点 $\mathrm{D}(d,\ d^2)$ とすると，$y = x^2$ 上の点 D における接線の傾きは $y' = 2x$ より　$2d$

これが，直線 BC の傾き $b+c$ に等しいので

$$b + c = 2d \quad \text{すなわち} \quad d = \frac{b+c}{2}$$

線分 BC の中点を M とするので　$\mathrm{M}\left(\dfrac{b+c}{2},\ \dfrac{b^2+c^2}{2}\right)$

$$\mathrm{MD} : x = \frac{b+c}{2}$$

$$\mathrm{MD} = \frac{b^2+c^2}{2} - d^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{(b+c)^2}{4} = \frac{(b-c)^2}{4}$$

← M, Dは同じx座標なので y座標の差

$$\mathrm{AC} : y = (a+c)x - ac$$

$b = \dfrac{a+c}{2}$ と定めるので　$a = 2b - c$　← 問題文に書いてある

線分 AC と直線 MD の交点 P の y 座標を Y とすると

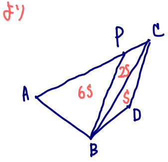
$$Y = (a+c) \cdot \frac{b+c}{2} - ac = 2b \cdot \frac{b+c}{2} - (2b-c)c = b^2 - bc + c^2$$

$$\mathrm{PM} = Y - \frac{b^2+c^2}{2} = b^2 - bc + c^2 - \frac{b^2+c^2}{2} = \frac{(b-c)^2}{2}$$

← y座標の差

よって　$\mathrm{PM} : \mathrm{MD} = \dfrac{(b-c)^2}{2} : \dfrac{(b-c)^2}{4} = \mathbf{2 : 1}$

下図より



(2)　△BCD の面積を S とすると，(1) より △BPC $= 2S$

x 座標に着目して，AP : PC $= 3 : 1$ であるから，面積について

$$\triangle\mathrm{BPA} = 4\triangle\mathrm{BPC} = 8S$$

よって，面積の比 △ABC : △BCD $= \mathbf{8 : 1}$