n 個の球の入った箱から球を一つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返す．ただし $k \leqq n$ とする．各回について，どの球が取り出されるかは同様に確からしいとする．取り出した k 個の球がすべて相異なる確率を $P(n,\ k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$P(n,\ k)$ を n と k を用いて表せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(P(n,\ k))^n$ を $Q(k)$ とおくとき，$Q(k)$ を k を用いて表せ．

　ただし公式 $\displaystyle\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$ を用いてもよい．

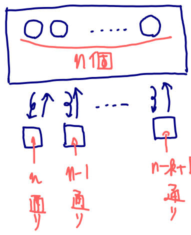
(3)　無限級数

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)}$$

の値を求めよ．ただし log は自然対数を表す．

〔2021　大阪市大 理系 前期〕

(1)　n 個の球の入った箱から球を一つずつ取り出して元に戻す操作を k 回繰り返すとき，取り出し方は全部で n^k（通り）



そのうち，取り出した k 個の球がすべて相異なるのは ${}_n\mathrm{P}_k$（通り）

よって，求める確率は

$$P(n,\ k)=\frac{{}_n\mathrm{P}_k}{n^k}=\boldsymbol{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}$$

n乗

(2)　$$(P(n,\ k))^n=\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n}\right)^n$$

指数法則 $(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n$

$$=\left(1-\frac{0}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^n$$

← (　)の中を $1-\frac{m}{n}$ の形にすると $\displaystyle\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1}$ が使える！

ここで $\dfrac{m}{n}=x$（$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$）とおくと

$n\to\infty$ のとき $x\to+0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n=\lim_{x\to+0}(1-x)^{\frac{m}{x}}=\lim_{x\to+0}\left\{(1-x)^{\frac{1}{x}}\right\}^m=(e^{-1})^m=e^{-m}$$

よって　$$Q(k)=\lim_{n\to\infty}(P(n,\ k))^n=e^0\cdot e^{-1}\cdot e^{-2}\cdot\cdots\cdot e^{-(k-1)}=e^{-(0+1+2+\cdots+k-1)}$$

$$=\boldsymbol{e^{-\frac{(k-1)k}{2}}}$$

(3)　$$\log Q(k)=-\frac{(k-1)k}{2}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\log Q(k)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{-2}{(k-1)k}=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=2}^{N}\frac{-2}{(k-1)k}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{-2\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right\}$$ ← 差の形に！

$$\left(\boxed{\frac{1}{1}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{N-1}}\boxed{-\frac{1}{N}}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{-2\left(1-\frac{1}{N}\right)\right\}$$

$$=\boldsymbol{-2}$$