数学B　平面ベクトル

~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

ベクトル

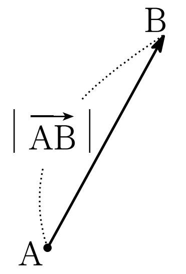
ベクトル とは 向き と 大きさ をもつ量 である.

有向線分 AB が右図のようなとき $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表し,

点 A を始点(してん), 点 B を終点(しゅうてん)といい, 大きさを $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ で表す.

また $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$ のように 1 つの文字に矢印をつけて表すこともよくある.

このとき $\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right|$



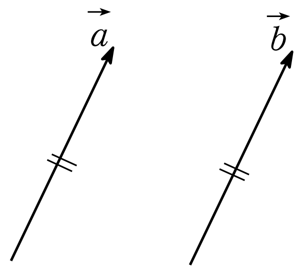
㊋ 有効線分とは向きのついた線分.

ベクトルの相当

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が, 位置に無関係に

同じ向き かつ 大きさが等しいとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は等しいといい $\vec{a} = \vec{b}$ と表す.



零ベクトル

始点と終点がともに点 A のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ を 大きさが 0 のベクトル とし

$\vec{a}$ の 零(ぜろ)ベクトル といい $\vec{0}$ と表す.

$\vec{0}$ の向きは考えないものとする.

㊟ 零ベクトル $\vec{0}$ は任意の向きもち, 1 つの方向に定まらない.

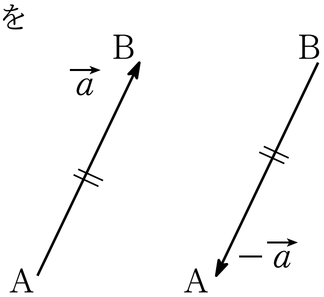
逆ベクトル

ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく, 向きが反対のベクトルを

$\vec{a}$ の 逆(ぎゃく) ベクトル といい $-\vec{a}$ と表す.

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とすると $-\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

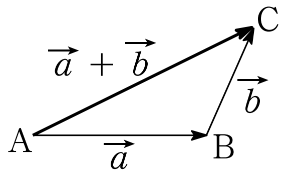


ベクトルの和

2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，1つの点Aをとり

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

となるように点B，Cをとる．



このとき $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい $\vec{a}+\vec{b}$ と表す．

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

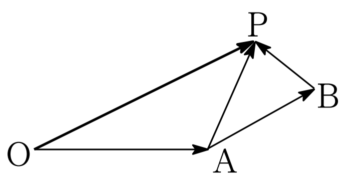
ベクトルの加法

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ （交換法則）
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ （結合法則）
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

ベクトルの和分

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は任意の点を経由して，次のように和にできる．

1. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$



考 ベクトルの和

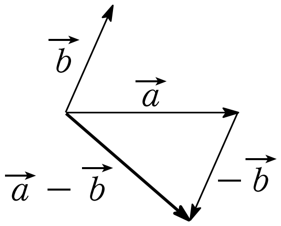
補 1 は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と交換法則が確認できる．
2 は $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と結合法則が確認できる．

ベクトルの差

2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ に対して差 $\vec{a}-\vec{b}$ を

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

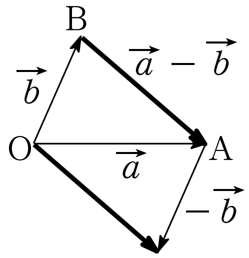
のように定める.



これは 右上図のようにかくことができる.

このとき $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$



㊚ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

ベクトルの差分（始点の変換）

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の始点を A から O に変えて，次のように差にできる.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

つまり 変える始点で（終点）－（始点）

考 $\boxed{\text{ベクトルの差}}$

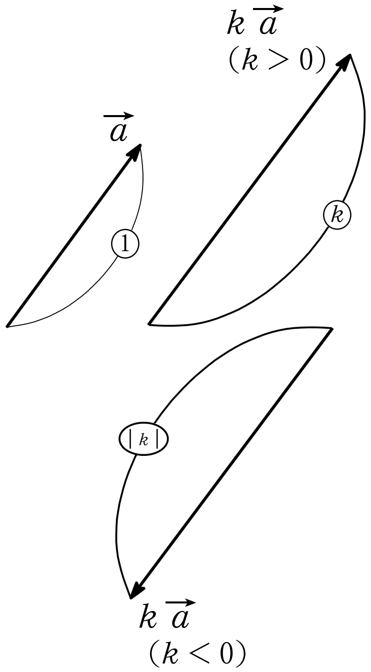
例 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}$（始点を A から P）

ベクトルの実数倍

ベクトル $\vec{a}$ と実数 k に対して，$\vec{a}$ の k 倍 $k\vec{a}$ は次のように定義する．

$\boxed{1}$ $k>0$ のとき
$\vec{a}$ と同じ向きで，
大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の k 倍であるベクトル

特に $1\vec{a}=\vec{a}$

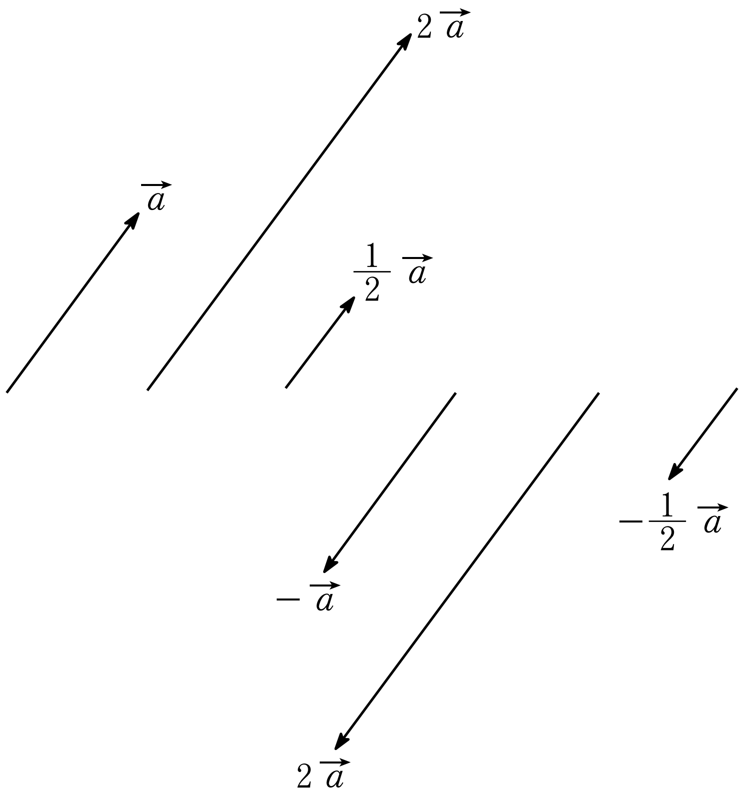


$\boxed{2}$ $k<0$ のとき
$\vec{a}$ と反対向きで，
大きさが $\left|\vec{a}\right|$ の $|k|$ 倍であるベクトル

特に $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$

$\boxed{3}$ $k=0$ のとき $0\vec{a}=\vec{0}$ （零ベクトル）

例



実数とベクトルの性質

x，y，k を実数として，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $x\left(y\vec{a}\right)=(xy)\vec{a}$

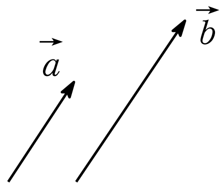
$\boxed{2}$ $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$ （分配法則）

$\boxed{3}$ $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ （分配法則）

ベクトルの平行条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する



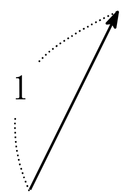
単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを **単位（たんい）ベクトル** という．

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき

$\boxed{1}$ $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\boxed{2}$ $\vec{a}$ と反対向きの単位ベクトルは $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$



平面ベクトルの 1 次結合

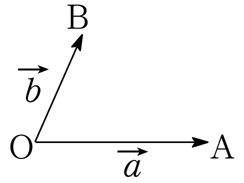
2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対し

実数 s, t を用いて $s\vec{a}+t\vec{b}$ と表されることを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **1次結合**（いちじけつごう） という．

平面上の 1 次独立なベクトル

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が **1次独立**（いちじどくりつ）であるとは

次の条件を満たすことである．



$\boxed{1}$ $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ （$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は大きさがあり平行ではない）

$\boxed{2}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと 3 点 O，A，B は同一直線上にない

$\boxed{3}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと $\triangle\mathrm{OAB}$ が存在する

$\boxed{4}$ 実数 x，y に対し $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ならば $x=0$ かつ $y=0$

補 $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は同値．

$\boxed{4}$ が一般的な定義ですが，高校の教科書では $\boxed{1}$ を定義とする．

1 次独立を線形独立（せんけいどくりつ）ということもある．

1 次独立でないことを1次従属（いちじじゅうぞく）または線形従属（せんけいじゅうぞく）という．

1次独立な平面ベクトルの性質

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立，x，y，s，t を実数として次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\boxed{2}$ $x\vec{a}+y\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{b} \iff \begin{cases} x=s \\ y=t \end{cases}$

考 $\boxed{1}$ ($\Longrightarrow$ について)

$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ……①

① のとき $y \fallingdotseq 0$ と仮定すると $\vec{b}=-\dfrac{x}{y}\vec{a}$

これは $x=0$ ならば $\vec{b}=\vec{0}$ となり矛盾する．

$x \fallingdotseq 0$ ならば $\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$ であるから $\vec{b} /\!/ \vec{a}$ となり矛盾する．

これらのことから $y=0$ であり ① は $x\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$ であるから $x=0$ である．

($\Longleftarrow$ について)

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ならば $x\vec{a}+y\vec{b}=0\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}$ である．

$\boxed{2}$ $x\vec{a}+y\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{b}$

$\iff (x-s)\vec{a}+(y-t)\vec{b}=\vec{0}$

$\iff \begin{cases} x-s=0 \\ y-t=0 \end{cases}$ （$\because$ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立，$x-s$, $y-t$ は実数より $\boxed{1}$）

$\iff \begin{cases} x=s \\ y=t \end{cases}$

平面ベクトルの1次独立と1次結合

平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ は，1次独立なベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて

$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ (x, y は実数)

の形でただ1通りに表される．

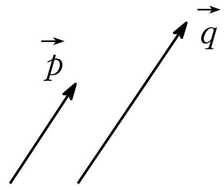
1 次結合とベクトルの平行条件

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立，x，y，s，t を 0 以外の実数として，2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ が

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$
$$\vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表されるとき

$$\vec{p} /\!/ \vec{q} \iff x : y = s : t$$



平面ベクトルの成分表示

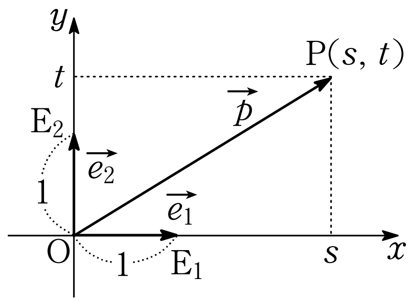
座標平面において，点 O を原点，点 $\mathrm{E}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{E}_2(0,\ 1)$ とする

x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを

座標軸に関する 基本（きほん）ベクトル といい，それぞれ

$$\vec{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{OE_1}},\quad \vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{OE_2}}$$

とする．



このとき $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ をとると

$$\vec{p} = s\vec{e_1} + t\vec{e_2}$$

とただ 1 通りで表せて，これを 基本ベクトル表示 という．

さらに

$\vec{p} = (s,\ t)$ または $\vec{p} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ のように表し，ベクトル $\vec{p}$ の 成分表示（せいぶんひょうじ） という．

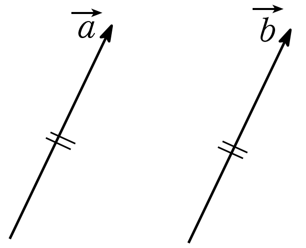
ここで s を $\vec{p}$ の x 成分，t を $\vec{p}$ の y 成分 という．

とくに $\vec{0}$，$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の成分表示は　$\vec{0} = (0,\ 0)$，$\vec{e_1} = (1,\ 0)$，$\vec{e_2} = (0,\ 1)$

成分表示された平面ベクトルの相当

$\vec{a} = (a,\ b)$，$\vec{b} = (x,\ y)$ のとき

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$



成分表示された平面ベクトルの大きさ

$\vec{a} = (a,\ b)$ のとき

$\vec{a}$ の大きさは $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$

つまり $(\vec{a}$ の大きさ $) = \sqrt{(x\text{ 成分})^2 + (y\text{ 成分})^2}$

㊐例 $\vec{a} = (2,\ 3)$ のとき $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

成分表示された平面ベクトルの和・差・実数倍

$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$，k は実数 のとき

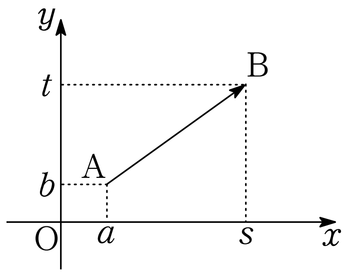
和：$\vec{a}+\vec{b}=(a,\ b)+(x,\ y)=(a+x,\ b+y)$

差：$\vec{a}-\vec{b}=(a,\ b)-(x,\ y)=(a-x,\ b-y)$

実数倍：$k\vec{a}=k(a,\ b)=(ka,\ kb)$

座標平面のベクトルの成分表示と大きさ

座標平面の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(s,\ t)$ のとき



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-a,\ t-b)$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(s-a)^2+(t-b)^2}$

つまり $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{の大きさ}\right)=\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2}$

㊖ 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ として $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b), \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s,\ t)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-a,\ t-b)$

㊗ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさは 2 点 A，B の距離

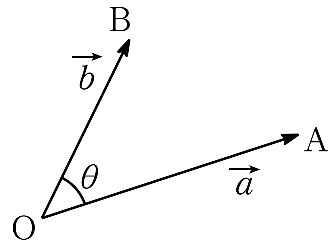
ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，点 O を始点として，

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような点 A，B をとる．

このとき $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $\left(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ\right)$ を

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **なす角** という．



ベクトルの内積

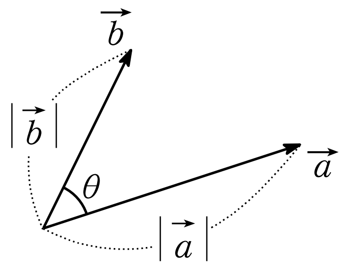
1. $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のとき

   内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

2. $\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

   $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ として

   内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

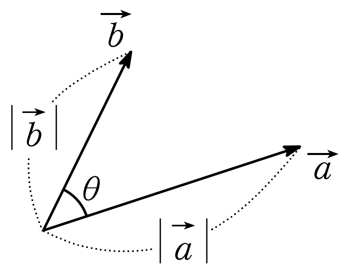


余弦とベクトル

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

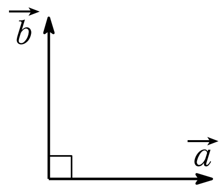
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$



ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



㊔ $\vec{a} \perp \vec{b}$ となるのは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° であるから　$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$

㊟ $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のとき　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$　となるが $\vec{a} \perp \vec{b}$ ではないので $\Longleftarrow$ は成り立たない．

㊫ 大学の教科書では $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときも $\vec{a} \perp \vec{b}$ とし「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交する」としている．本当は $\vec{0}$ かどうかは気にしなくてよいが，高校の範囲では注意する．

ベクトルの内積の性質

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ （交換法則）
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ （分配法則）
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ （分配法則）
4. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ （分配法則）
5. $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)$ （k は実数）

ベクトルの内積と大きさの関係

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

つまり 同じベクトルの内積はそのベクトルの大きさの2乗

平面ベクトルの展開

x，y を実数として

$$\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|^2=x^2\left|\vec{a}\right|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2\left|\vec{b}\right|^2$$

考 $\left|x\vec{a}+y\vec{b}\right|^2=(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})$ （$\because$ $\boxed{\text{ベクトルの内積と大きさの関係}}$）

$=x^2\vec{a}\cdot\vec{a}+xy\vec{a}\cdot\vec{b}+xy\vec{b}\cdot\vec{a}+y^2\vec{b}\cdot\vec{b}$ （$\because$ 分配法則）

$=x^2\left|\vec{a}\right|^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2\left|\vec{b}\right|^2$

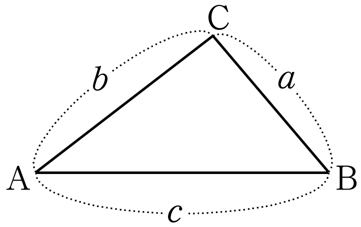
三角形と内積

BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ となる △ABC について

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2}$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$



考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\angle\mathrm{BAC}$

$= cb\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ （∵ 余弦定理）

$= \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

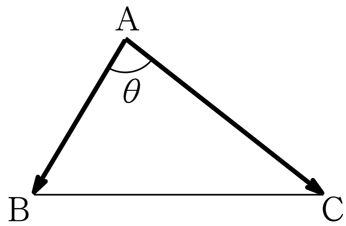
三角形の内角が鋭角・直角・鈍角になる条件

$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とする △ABC において

$\boxed{1}$ θ が 鋭角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} > 0$

$\boxed{2}$ θ が 直角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$

$\boxed{3}$ θ が 鈍角 $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} < 0$



考 $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}$

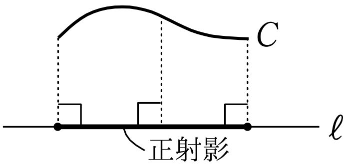
$\boxed{1}$ θ が鋭角 $\iff \cos\theta > 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} > 0$

$\boxed{2}$ θ が直角 $\iff \cos\theta = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$（垂直条件）

$\boxed{3}$ θ が鈍角 $\iff \cos\theta < 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} < 0$

正射影

図形 C 上の任意の点から直線 ℓ に下ろした垂線の足となる点全体を図形 C から直線 ℓ 上への **正射影**（せいしゃえい）という．



ベクトルの内積の図形的意味

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$ とする．

線分 OB の直線 OA へ正射影を線分 OH として

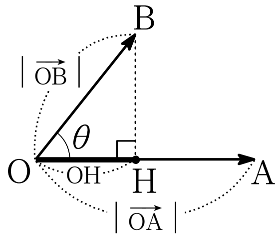
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

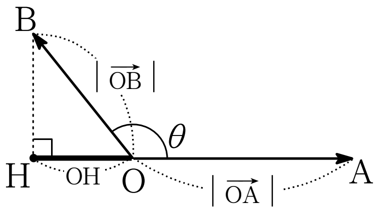
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$$

$$= \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| \mathrm{OH}$$

ただし OH は符号付き長さで

$$\mathrm{OH} = \begin{cases} \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| & \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| & \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi\right) \end{cases}$$





つまり $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right.$ と $\left.\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{ の内積}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{ の長さ}\right) \times \left(\text{正射影 OH の符号付き長さ}\right)$

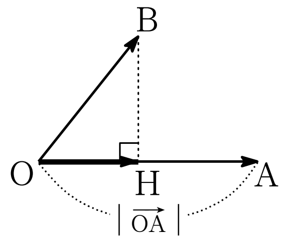
㊟ 符号付き長さとは，負の長さも考える長さのこと．
$\mathrm{OH} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$ より $\cos\theta < 0$ ならば OH は負になる．

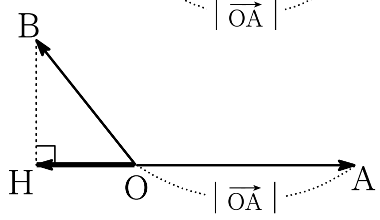
正射影ベクトル

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \neq \vec{0}$ とする．

線分 OB の直線 OA 上への正射影を線分 OH として

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ 上への **正射影ベクトル** という．





このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

つまり（正射影ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$）$= \dfrac{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{と}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\text{の内積})}{(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\text{の大きさの 2 乗})}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

㋕ 点 H は直線 OA 上にあるので，実数 k は存在し

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots\cdots☆$$

と表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(k\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = k\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$

これより $k\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ すなわち $k = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}$

よって ☆ から $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

㊗ 内積の図形的意味 から $\mathrm{OH} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}$

$$k = \frac{\mathrm{OH}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2}$$

成分表示された平面ベクトルの内積

$\vec{a}=(a,\ b)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ のとき

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$

㊫ $\vec{a}=0$ または $\vec{b}=0$ のとき

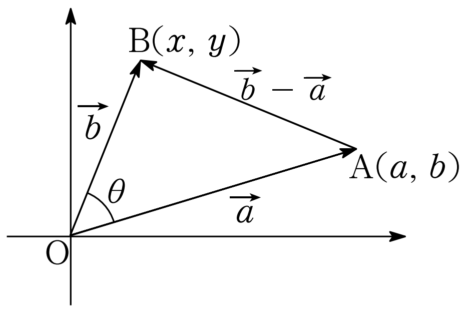
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

このとき $(a,\ b)=(0,\ 0)$ または $(x,\ y)=(0,\ 0)$ であるから $ax+by=0$

$\vec{a}\neq 0$ かつ $\vec{b}\neq 0$ のとき

$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ かつ $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

原点Oを $\vec{a}$，$\vec{b}$ の始点となるように座標軸を設定すると



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x,\ y)$

とおけて

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x-a,\ y-b)$

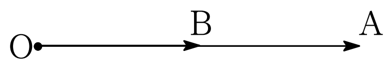
このとき $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とする．

$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を用いると

$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$ ……①

$\theta=0^\circ$ のとき，$\cos\theta=\cos0^\circ=1$ であり

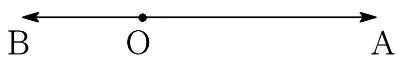
$\mathrm{AB}^2=|\mathrm{OA}-\mathrm{OB}|^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$



これより ①は $\theta=0^\circ$ のときも成り立つ．

$\theta=180^\circ$ のとき，$\cos\theta=\cos180^\circ=-1$ であり

$\mathrm{AB}^2=|\mathrm{OA}+\mathrm{OB}|^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2+2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$



これより ①は $\theta=180^\circ$ のときも成り立つ．

これらのことから①は $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のときに成り立ち

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$

すなわち

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+x^2+y^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって $\vec{a}\cdot\vec{b}=ax+by$

ベクトルの内積と不等式

2つのベクトル $\vec{p}$, $\vec{q}$ について

$$(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 \leqq |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$$

等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$

㊟ ㋐ $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=0$ のとき

$$(\text{左辺})=(\vec{p}\cdot\vec{q})^2=0$$

$$(\text{右辺})=|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2=0$$

すなわち（左辺）＝（右辺）である．

㋑ $\vec{p}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{q}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{p}$, $\vec{q}$ のなす角を θ ($0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$) とすると

$$\begin{aligned}(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 &= (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta)^2\\ &= |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta\\ &\leqq |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \quad (\because \cos^2\theta\leqq1)\end{aligned}$$

等号が成り立つのは $\cos^2\theta=1$ であるから $\cos\theta=\pm1$

すなわち $\theta=0^\circ$ または $\theta=180^\circ$ であるから $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$

よって，㋐，㋑ より示された．

ベクトルでの2次元のコーシー・シュワルツの不等式

$\vec{p}=(a, b)$, $\vec{q}=(x, y)$ のとき

$$(\vec{p}\cdot\vec{q})^2 \leqq |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$$

つまり

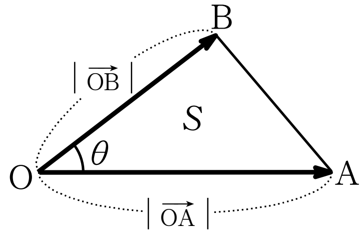
$$(ax+by)^2\leqq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

等号が成り立つのは $\vec{p}=\vec{0}$ または $\vec{q}=\vec{0}$ または $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$

すなわち $(a, b)=(0, 0)$ または $(x, y)=(0, 0)$ または $a:b=x:y$

ベクトルでの三角形の面積

$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ となる $\triangle \mathrm{OAB}$ の面積を S とする.



$\boxed{1}$ $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta$

$\boxed{2}$ $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}$

$\boxed{3}$ $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(c,\ d)\end{cases}$ ならば $S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$

考 $\boxed{2}$
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\sin^2\theta}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2(1-\cos^2\theta)}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2\cos\theta\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=(c,\ d)\end{cases}$ ならば $\boxed{2}$ より

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2-\{(ac)^2+2abcd+(bd)^2\}}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad)^2-2abcd+(bc)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}\\
&=\frac{1}{2}|ad-bc|\end{aligned}$$

位置ベクトル

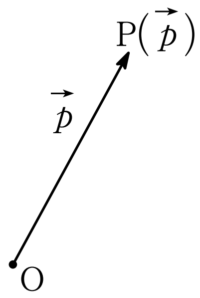
平面上または空間内に定点Oをとると，任意の点Pの位置は

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$ によって定まる．

この $\vec{p}$ をOを基準とする点Pの **位置(いち)ベクトル** という．

点Pの位置ベクトルが $\vec{p}$ であることを $\mathrm{P}(\vec{p})$ のように表す．

とくに 2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$



補 「位置ベクトル」は始点を同じものにして，終点が位置を決めるベクトル．

注 ベクトルで位置を考えるときは，矢印の先っぽの点だけを考える．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とあれば，線分OPではなく点Pのみを考える．

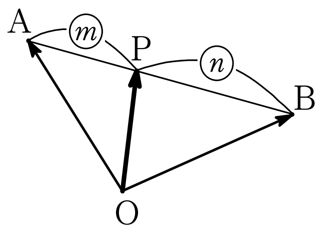
内分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P とすると，次が成り立つ.

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$

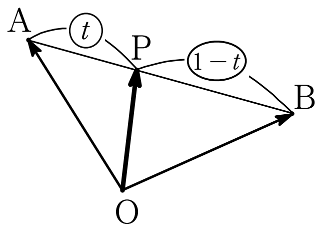
$\qquad=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



とくに 線分 AB を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

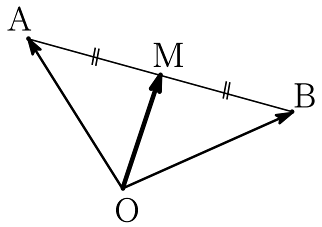


また 線分 AB を $1:1$ に内分する点
つまり 線分 AB の中点を M とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

$\qquad=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



考 $\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ で始点を O とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

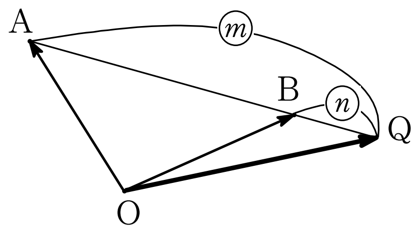
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1-\dfrac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\qquad=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

外分点の位置ベクトル

線分 AB を $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m \fallingdotseq n)$ に外分する点を Q とすると
次が成り立つ.

〔$m>n$ のとき〕

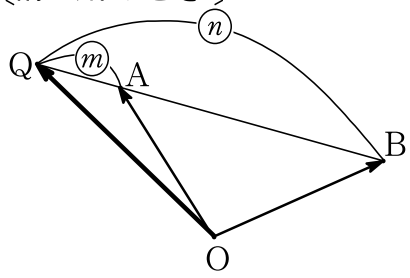


$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

または

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{-m}{n-m}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

〔$m<n$ のとき〕



$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{(-n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+(-n)}$
$= \dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

または

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(-m)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{(-m)+n}$
$= \dfrac{n}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{-m}{-m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

とくに $\dfrac{m}{m-n} = t$ とすると

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

考 $m>n$ のとき

$\boxed{1}$ $\mathrm{AB}:\mathrm{AQ} = (m-n):m$ より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O として

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \dfrac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(1-\dfrac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
$= \dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$m<n$ のときも同様

三角形の重心の位置ベクトル

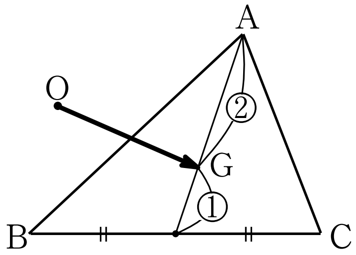
△ABC の重心を G とすると，次が成り立つ.

1 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

2 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

3 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

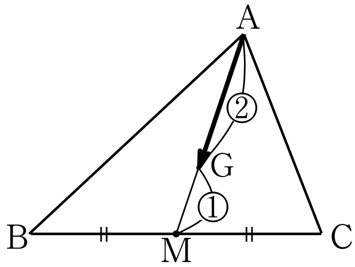


考 1 線分 AB の中点を M とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



2 1 で始点を O として

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

3 1 で始点を G として

$-\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)$

よって $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

別 2 で始点を G として

$-\overrightarrow{\mathrm{GO}}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GO}}\right)$

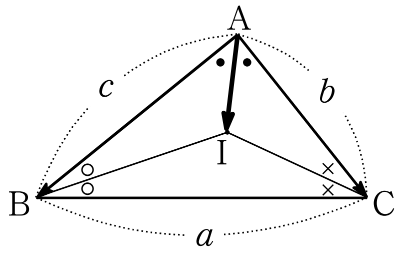
よって $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

三角形の内心の位置ベクトル

$\mathrm{BC}=a,\ \mathrm{CA}=b,\ \mathrm{AB}=c$ となる $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を I とすると，次が成り立つ．

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}$$



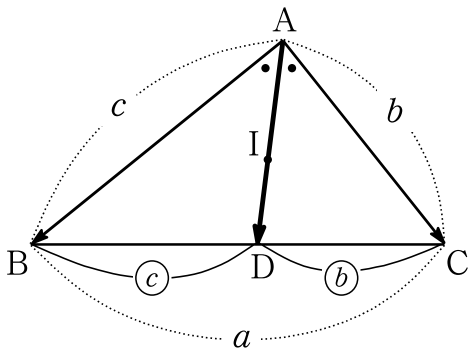
$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$

考 $\boxed{1}$ 直線 AI は $\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線より

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=c:b$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots①$$

$\mathrm{BD}=\dfrac{c}{c+b}\mathrm{BC}=\dfrac{ca}{c+b}$

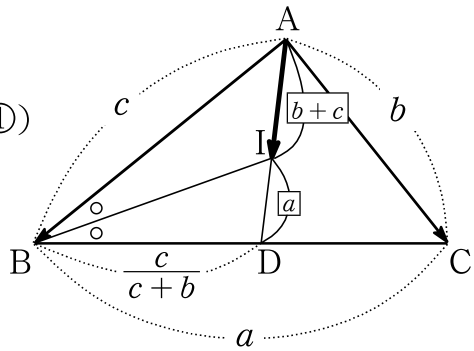


直線 BI は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線より

$$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=c:\frac{ca}{b+c}$$
$$=(b+c):a$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AI}}&=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{c+b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\ (\because ①)\\&=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}\end{aligned}$$



$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で始点を O として

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

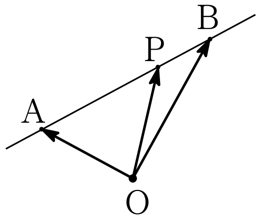
すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\dfrac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

共線条件

異なる 2 点 A，B があり，点 O は直線 AB 上にない点とする．

点 P が直線 AB 上に存在する条件は次である．



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 t が存在する．

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $x + y = 1$ となる実数 x，y が存在する．

考 $\boxed{1}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ （$\because$ $\boxed{1}$）

$\boxed{3}$ $\boxed{1}$ で始点を O とすると $\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

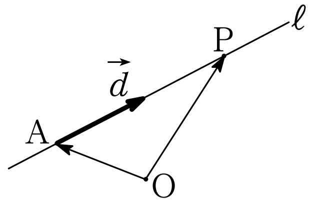
$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ で $1-t = x$，$t = y$ とおくと $x + y = (1-t) + t = 1$

直線のベクトル方程式（ベクトルを用いて直線を表わす式）

点 A を通り，$\vec{0}$ でない $\vec{d}$ に平行な直線を ℓ とする．

ℓ を点 P が表すとき，t を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{d}$$



と表せて，これを直線のベクトル方程式という．

このとき $\vec{d}$ を 方向ベクトル，t 媒介変数（ばいかいへんすう）という．

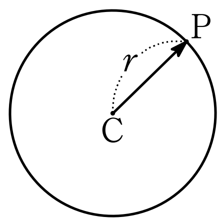
㊟ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \parallel \vec{d}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$

円のベクトル方程式（ベクトルを用いて円を表わす式）

平面上で

中心が点 C，半径が r $(r>0)$ の円を点 P が表すとき

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = r$$



と表せて，これを 円のベクトル方程式 という．

㊟ $\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$

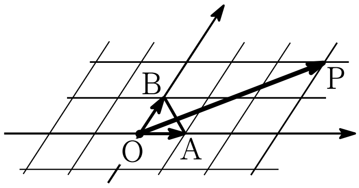
(補) 空間内にすると球のベクトル方程式になる．

斜交座標

平面において

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



と表されるならば

点 P は O(0, 0)，A(1, 0)，B(0, 1) とする座標平面上の点 P$(x,\ y)$

とみなすことができる．

㊂ 直交座標の座標軸を斜めにしても比の関係は保つ．

1 つの実数の組 $(x,\ y)$ に対して 1 つの点 P が 1 対 1 対応する．

x，y が実数全体を動くとき，点 P は平面上のすべての点を表すことができる．

㊕ $(x,\ y)=(0,\ 0)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$ であるから P＝O

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから P＝A

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから P＝B

平面ベクトルと領域

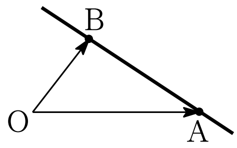
平面において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立，x，y を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表されるならば，次のように x，y の条件に対して 点 P の存在範囲がわかる．

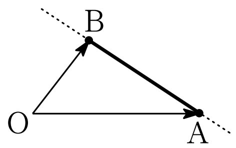
$\boxed{1}$　$x + y = 1$

$\Longleftrightarrow$ 点 P は直線 AB 上



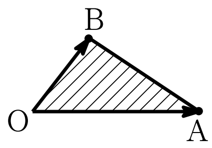
$\boxed{2}$　$x + y = 1$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ 点 P は線分 AB 上



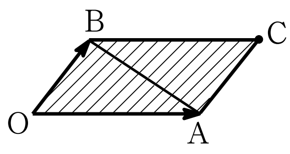
$\boxed{3}$　$x + y \leqq 1$ かつ $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$

$\Longleftrightarrow$ 点 P は三角形 ABC の周または内部



$\boxed{4}$　$0 \leqq y \leqq 1$ かつ $0 \leqq y \leqq 1$

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ として点 P は平行四辺形 OACB の周または内部
（点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で張られる平行四辺形の周または内部）

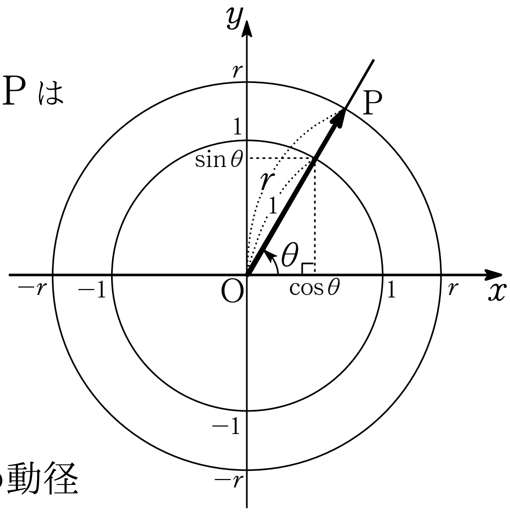


原点が中心の円の媒介変数表示

座標平面で

原点 O を中心とする半径 r $(r>0)$ の円上の点 P は

次のように表せる.



$\boxed{1}$ $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=r(\cos\theta,\ \sin\theta)$

ここで

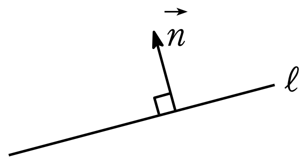
半直線 OP は x 軸の正の部分を始線とする角 θ の動径

㊫ $r=1$ ならば単位円なので $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

直線と法線ベクトル

右図の$\vec{n}$のように，直線ℓと垂直な$\vec{0}$でないベクトルを

直線ℓの**法線**(ほうせん)**ベクトル**という．



座標平面で通る点と法線ベクトルがわかる直線の方程式

$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$とする．

座標平面で

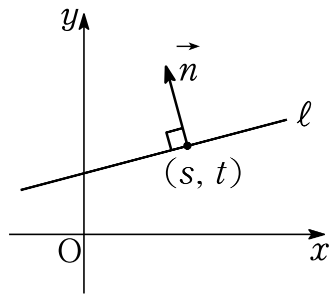
点$(s,\ t)$を通り，法線ベクトルの1つが$\vec{n}=(a,\ b)$

である直線の方程式は

$$a(x-s)+b(y-t)=0$$

すなわち

$$ax+by+c=0 \quad \text{ただし} \quad c=-as-bt$$



㊄ 点$\mathrm{A}(s,\ t)$，直線上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-s,\ y-t)$

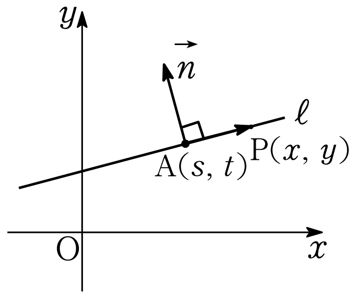
$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ であるから

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

これより $a(x-s)+b(y-t)=0$

展開して $ax+by-as-bt=0$

$c=-as-bt$ とおいて $ax+by+c=0$



座標平面での直線と法線ベクトル

$a,\ b,\ c$は定数，$(a,\ b) \neq (0,\ 0)$とする．

座標平面で直線ℓの方程式が

$$\ell : ax+by+c=0$$

ならば $\vec{n}=(a,\ b)$ はℓの法線ベクトルの1つ．