

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ である。

- (1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を計算し、 C の概形を図示せよ。
 (2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2016 東工大 前期]

[解答例]

(1) $\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 3(\sin 3t - \sin t) = 6\cos 2t \sin t$

← 差を積にする公式
 $\sin A - \sin B = 2\cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

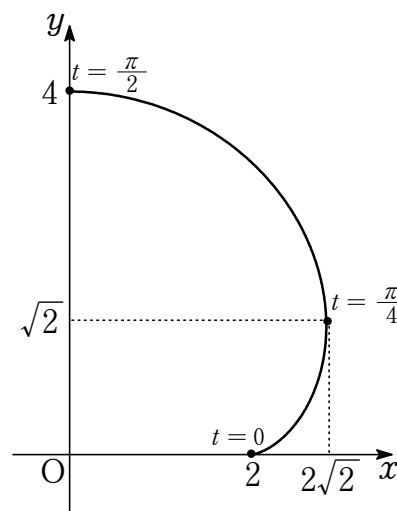
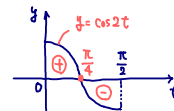
$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = -3(\cos 3t - \cos t) = 6\sin 2t \sin t$

$\cos A - \cos B = -2\sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ において $\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $\sin t > 0$ より $\cos 2t = 0$ であるから $t = \frac{\pi}{4}$

$\sin 2t > 0, \sin t > 0$ であるから $\frac{dy}{dt} > 0$

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	+	0	-	
x	2	→	$2\sqrt{2}$	←	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+		+	0
y	0	↑	$\sqrt{2}$	↑	4
(x, y)	(2, 0)	↗	$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$	↖	(0, 4)



C の概形は右図。

- (2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S = \int_0^4 x dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \frac{dy}{dt} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t) \cdot 3(\cos t - \cos 3t) dt$$

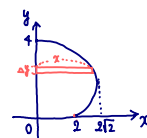
$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - 4\cos 3t \cos t + \cos^2 3t) dt$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - 2(\cos 4t + \cos 2t) + \frac{1 + \cos 6t}{2} \right\} dt$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 6t - 4\cos 4t - \cos 2t + 4) dt$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{\sin 6t}{6} - \sin 4t - \frac{\sin 2t}{2} + 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi$$

$\Delta S = \int y dx = \int x dy$
 を $0 \leq y \leq 4$ で求積
 と積分!



[別解例1] *πを積分!*

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ のときの y を y_1 , $\frac{\pi}{4} < t \leq \frac{\pi}{2}$ のときの y を y_2 とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\sqrt{2}} y_2 dx - \int_0^2 y_1 dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} y \frac{dx}{dt} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \right) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin t - \sin 3t) \cdot 3(\sin 3t - \sin t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 t - 4 \sin 3t \sin t + \sin^2 3t) dt \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3}{2}(1 - \cos 2t) + 2(\cos 4t - \cos 2t) + \frac{1 - \cos 6t}{2} \right\} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 6t + 4 \cos 4t - 7 \cos 2t + 4) dt \\ &= \frac{3}{2} \left[-\frac{\sin 6t}{6} + \sin 4t - \frac{7}{2} \cos 2t + 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi \end{aligned}$$

