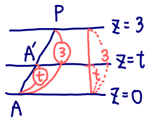
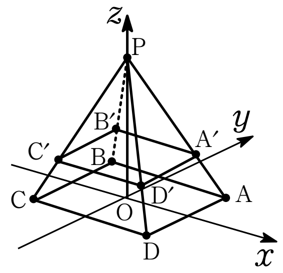
xyz 空間に 5 点 A(1, 1, 0)，B(−1, 1, 0)，C(−1, −1, 0)，D(1, −1, 0)，P(0, 0, 3) をとる．四角錐 PABCD の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ．

〔1998　東大 理科〕

〔解答例〕





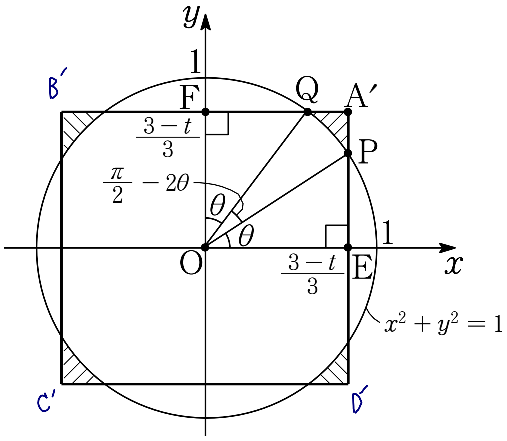
平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq 3)$ と 4 線分 PA，PB，PC，PD の交点をそれぞれ A′, B′, C′, D′ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t}{3}\overrightarrow{\mathrm{A'P}} = (1,\ 1,\ 0) + \frac{t}{3}(-1,\ -1,\ 3)$$
$$= \left(\frac{3-t}{3},\ \frac{3-t}{3},\ t\right)$$

平面 $z=t\ (0 \leqq t \leqq 3)$ における断面積を $S(t)$ とする．

断面を xy 平面に正射影すると

$$\begin{cases} -\dfrac{3-t}{3} \leqq x \leqq \dfrac{3-t}{3} \\ -\dfrac{3-t}{3} \leqq y \leqq \dfrac{3-t}{3} \\ x^2+y^2 \geqq 1 \end{cases}$$



対称性から $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ での断面積を考えて 4 倍する．

断面が存在する条件は点 $\mathrm{A'}\left(\dfrac{3-t}{3},\ \dfrac{3-t}{3}\right)$ が単位円の外部にあることから

$\mathrm{OA'}>1$

$$\sqrt{2}\cdot\frac{3-t}{3} > 1 \quad \text{すなわち} \quad 3-\frac{3}{\sqrt{2}} > t(\geqq 0)$$

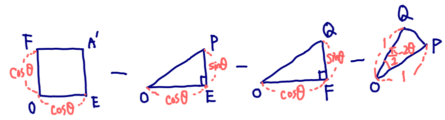
$\mathrm{E}\left(\dfrac{3-t}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{3-t}{3}\right)$，線分 A′E，A′F の単位円との共有点をそれぞれ P，Q とする．

$\angle\mathrm{EOP} = \angle\mathrm{FOQ} = \theta\ \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とすると $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるから

← Pは単位円上にあることから θを設定することがみえてくる

$$\frac{3-t}{3} = \cos\theta \quad \text{すなわち} \quad t = 3-3\cos\theta$$

$$S(t) = 4\{(\text{正方形 OEA'F}) - \triangle\mathrm{OEP} - \triangle\mathrm{OFQ} - \text{扇形 OPQ}\}$$



$$= 4\left\{\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\times 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$
$$= 4\left(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

求める体積を V とすると

$$V = \int_0^{3-\frac{3}{\sqrt{2}}} S(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(3-3\cos\theta)\,\frac{dt}{d\theta}\,d\theta$$

← $t=3-3\cos\theta$ と置換!

t	$0 \to 3-\frac{3}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta - \frac{\pi}{4} + \theta\right)(3\sin\theta)\,d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\theta\cos^2\theta - \cos\theta\sin^2\theta - \frac{\pi}{4}\sin\theta + \theta\sin\theta\right)d\theta$$
$$= 12\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + \frac{\pi}{4}\cos\theta + \theta(-\cos\theta) + \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= 12\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$-\frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + \cancel{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} - \frac{\pi}{4} - \cancel{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= 12\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \boldsymbol{4+4\sqrt{2}-3\pi}$$