次の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする．z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w が表す点が描く図形を求めよ．

(2)　複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする．$z \fallingdotseq \pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする．P，Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ．

〔2003　神大 理系 前期〕

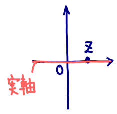
〔解答例〕

(1)　$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より $(w-1)z=-i(w+1)$

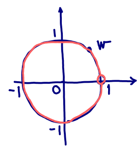
$w=1$ とすると $0=-2i$ となり成り立たないので $w \fallingdotseq 1$

これより $z=\dfrac{-i(w+1)}{w-1}$ ……①　← zをwで表した

z は実数であるから $\overline{z}=z$　← zは実軸上を動くので実数



① より $\dfrac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}=\dfrac{-i(w+1)}{w-1}$



このことから $(\overline{w}+1)(w-1)=-(w+1)(\overline{w}-1)$ となり $w\overline{w}=1$

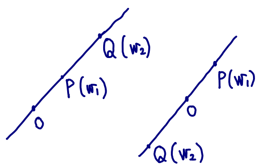
すなわち $|w|=1$ かつ $w \fallingdotseq 1$

よって，w が表す点が描く図形は **原点が中心で半径 1 の円，ただし，点 1 はのぞく**

(2)　$\dfrac{w_2}{w_1}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\cdot\dfrac{z+i}{z-i}$

これより $\overline{\left(\dfrac{w_2}{w_1}\right)}=\dfrac{z+i}{z-i}\cdot\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}=\dfrac{w_2}{w_1}$

$\overrightarrow{OP}$と$\overrightarrow{OQ}$のなす角が0, π
ということ



すなわち $\dfrac{w_2}{w_1}$ は実数であるから $\arg\dfrac{w_2}{w_1}=m\pi$（$m$ は整数）

よって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる実数 k が存在するので P，Q と原点 O が同一直線上にある．