座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする．$a>2$，$0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\sin\theta)$ をとる．原点 O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．

(1)　点 R の座標を求めよ．

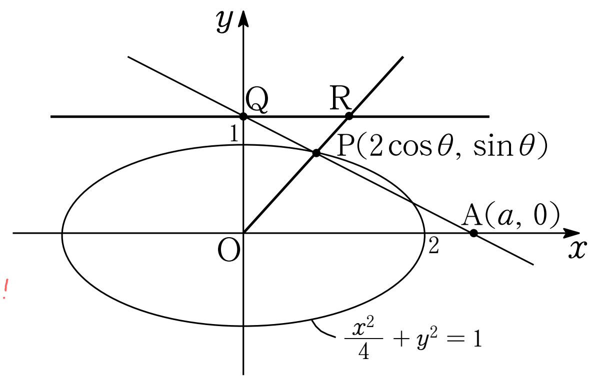
(2)　(1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3)　原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

〔2015　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　$-2<2\cos\theta<2$，$a>2$ より $2\cos\theta\neq a$



$\mathrm{AP}: y=\dfrac{-\sin\theta}{a-2\cos\theta}(x-a)$

点 $\mathrm{Q}\left(0,\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$ である．

点 Q を通り x 軸に平行な直線の方程式は

$$y=\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\quad\cdots\cdots①$$

直線 OP の方程式は

$$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{2}\ \text{のとき}\quad x=0 \\[2mm] \theta\neq\dfrac{\pi}{2}\ \text{のとき}\quad y=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta}x\end{cases}$$

← 傾きがない直線!

すなわち $(\sin\theta)x-(2\cos\theta)y=0$ ……②

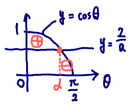
① と ② を連立して $\boldsymbol{\mathrm{R}\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)}$

(2)　$f(\theta)=a\cdot\dfrac{\sin\theta}{a-2\cos\theta}\ (0<\theta<\pi)$　← θの関数

$$f'(\theta)=a\cdot\frac{\cos\theta(a-2\cos\theta)-\sin\theta\cdot2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=a\cdot\frac{a\cos\theta-2}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$$=a\cdot\frac{a\left(\cos\theta-\dfrac{2}{a}\right)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

← 差の形!



θが直接求まらないので αとおいて関係式を作る!

$0<\dfrac{2}{a}<1$ より $f'(\theta)=0$ となる θ がただ 1 つ存在し，それを α とすると

$$\cos\alpha=\frac{2}{a},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

よって，右の増減表より $f(\theta)$ の最大値は

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$$f(\alpha)=a\cdot\frac{\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=a\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\cdot\dfrac{2}{a}}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}}$$

(3)　$g(\theta)=\mathrm{OR}^2=\left(\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2+\left(\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2=a^2\cdot\dfrac{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(a-2\cos\theta)^2}$

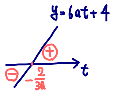
$$=a^2\cdot\frac{3\cos^2\theta-1}{(a-2\cos\theta)^2}\quad(\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta)$$

$\cos\theta = t$ とおくと　$0 < \theta < \pi$ より　$-1 < t < 1$

$$g(\theta) = h(t) = a^2 \cdot \frac{3t^2+1}{(a-2t)^2}$$

とおくと

$$\begin{aligned} h'(t) &= a^2 \cdot \frac{6t(a-2t)^2 - (3t^2+1)\cdot 2(a-2t)\cdot(-2)}{(a-2t)^4} \\ &= a^2 \cdot \frac{6t(a-2t)+4(3t^2+1)}{(a-2t)^3} \\ &= a^2 \cdot \frac{6at+4}{(a-2t)^3} \end{aligned}$$



$h'(t) = 0$ とすると　$t = -\dfrac{2}{3a}$

$a > 2$ より　$-1 < -\dfrac{2}{3a} < 0$

よって，右の増減表より $g(\theta)$ の最小値は

t	(-1)	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3a}$	$\cdots$	(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

$$h\left(-\frac{2}{3a}\right) = a^2 \cdot \frac{\dfrac{4}{3a^2}+1}{\left(a+\dfrac{4}{3a}\right)^2} = \frac{\dfrac{4+3a^2}{3}}{\dfrac{(3a^2+4)^2}{9a^2}} = \boldsymbol{\frac{3a^2}{3a^2+4}}$$