$x>0$ に対して

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$$

とする．

(1)　$0<x_1<x_2$ ならば，$0<f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を $g(x)$ を用いて表わせ．

(3)　$g(x)$ の第二次導関数 $g''(x)$ を $g(x)$ を用いて表わせ．

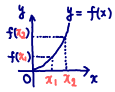
〔2020　大阪市大 理系 後期〕

〔解答例〕

(1)　$x>0$ において　$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}>0$

$x>0$ において $f(x)$ は単調増加である．

x	(0)	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	(0)	$\nearrow$



また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt=0$

よって　$0<x_1<x_2$　ならば　$0<f(x_1)<f(x_2)$　が成り立つ．

(2)　$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とするとき　$y=f(x) \iff x=g(y)$　g(x)を考えるので

x と y を入れかえた

このとき　$x=f(y) \iff y=g(x)$

$f(y)=\displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$　より　$x=\displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$　yで微分

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}$$

逆数

すなわち　$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1+y^3}=\sqrt{1+\{g(x)\}^3}$

よって　$\boldsymbol{g'(x)=\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$

(3)　(2) をさらに x で微分して

$$g''(x)=\frac{3\{g(x)\}^2\cdot g'(x)}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}=\frac{3\{g(x)\}^2\cdot\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}{2\sqrt{1+\{g(x)\}^3}}$$

$\leftarrow \left\{\sqrt{p(x)}\right\}'=\dfrac{p'(x)}{2\sqrt{p(x)}}$

よって　$\boldsymbol{g''(x)=\dfrac{3}{2}\{g(x)\}^2}$