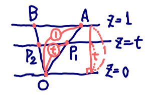
xyz 空間に 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1)，B(0, $\sqrt{3}$, 1) がある．平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする．点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体が作る立体を V_A とおく．同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体が作る立体を V_B とおく．さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ．

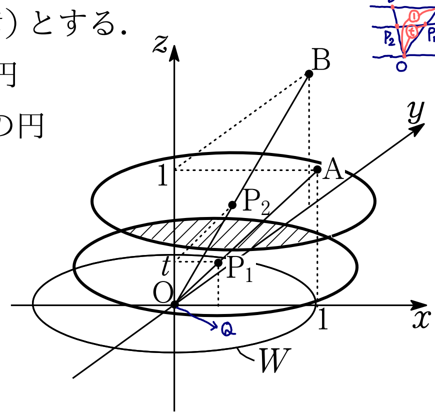
(2)　立体 V の体積を求めよ．

〔2012　阪大 理系 前期〕

〔解答例〕



(1)　平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ における V の切り口の面積を $S(t)$ とする．



V_A の切り口は $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 0,\ t)$ が中心，半径 1 の円

V_B の切り口は $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ \sqrt{3},\ t)$ が中心，半径 1 の円

この 2 円の共有点を C，D とすると　$t=\cos\theta$　として

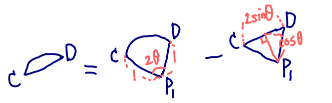
$$\mathrm{P_1C}=\mathrm{P_1D}=\mathrm{P_2C}=\mathrm{P_2D}=1,$$

$$\mathrm{P_1P_2}=2\cos\theta$$

$\mathrm{P_1P_2}\perp\mathrm{CD}$ であり，2 線分 $\mathrm{P_1P_2}$，CD の交点を E とすると

$$\angle\mathrm{CP_1E}=\angle\mathrm{DP_1E}=\theta$$

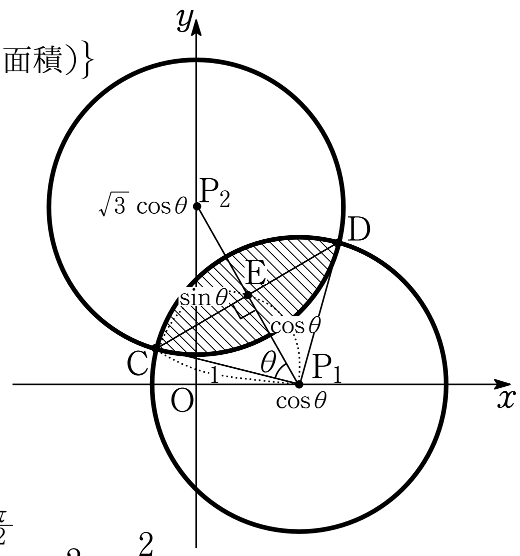
$$\mathrm{CE}=\mathrm{DE}=\sin\theta$$



このことから

$$\begin{aligned}S(t)&=2\times\{(\text{扇形 CP}_1\text{D の面積})-(\text{三角形 CP}_1\text{D の面積})\}\\&=2\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta\cos\theta\right)\\&=\boldsymbol{2\theta-2\sin\theta\cos\theta}\end{aligned}$$

[平面 z=t による V の切り口を xy 平面に正射影した図]



(2)　V の体積は

t=cosθ と置換

t	$0\to1$
θ	$\frac{\pi}{2}\to0$

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(t)\,dt&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\theta-2\sin\theta\cos\theta)\frac{dt}{d\theta}d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\theta-2\sin\theta\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\sin\theta-2\cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta\\&=\left[\,2\theta(-\cos\theta)+2\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{2}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$