数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta, \qquad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

（1）　一般項 b_n を求めよ．

（2）　すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数の底とする．

〔2013　東北大 理系 前期〕

〔 解答例 〕

$\int e^{g(\theta)} g'(\theta)\,d\theta = e^{g(\theta)} + C$

（1）　$$b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}}{n}} \quad \cdots\cdots①$$

（2）　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$

各辺に $e^{n\sin\theta}$ (>0) をかけて $\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta} \leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta \leqq e^{n\sin\theta}$

これより　積分は大小関係を保つ!

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\,d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta$$

が成り立つので

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n \leqq b_n \leqq a_n$$

は成り立つ．

よって　$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$　$\cdots\cdots$Ⓐ

が成り立つことが示された．

$\log \frac{2}{\sqrt{3}} nb_n = \log \frac{2}{\sqrt{3}} + \log nb_n$

（3）　Ⓐ の各辺に n (>0) をかけて　$nb_n \leqq na_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$

各辺に自然対数をとると　$\log(nb_n) \leqq \log(na_n) \leqq \log\dfrac{2}{\sqrt{3}} + \log nb_n$

各辺に $\dfrac{1}{n}$ (>0) をかけて

$$\frac{1}{n}\log(nb_n) \leqq \frac{1}{n}\log(na_n) \leqq \frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}\log nb_n \quad \cdots\cdots②$$

ここで

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(nb_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right) \quad (\because ①) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}\left(1 - e^{-n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2} + \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}}\log\underset{\downarrow \atop \log 1 = 0}{\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{n}\left\{\underbrace{\log e^{\frac{n}{2}}}_{\frac{n}{2}} + \log(1 - e^{-n})\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}\log nb_n\right) = \frac{1}{2}$$

よって，② ではさみうちの原理を用いて　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$