c を $0 < c < 1$ をみたす実数とする．$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y = f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3 - 2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ．

〔2013　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　$f(x)$ を 2 次以下の多項式で $y = f(x)$ が点 $(0,\ 0)$ を通るので

定数項は 0

$f(x) = ax^2 + bx$　とおける．← a, b を求める!

$y = f(x)$ のグラフが点 $(c,\ c^3 - 2c)$，$(1,\ -1)$ を通るので

$$\begin{cases} c^3 - 2c = ac^2 + bc & \cdots\cdots ① \\ -1 = a + b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

← $f(c) = c^3 - 2c$

← $f(1) = -1$

② より　$b = -a - 1$　$\cdots\cdots$②′

②′ を ① へ代入して　$c^3 - 2c = ac^2 - (a+1)c$

$c^3 - ac^2 + (a-1)c = 0$

$c\{c^2 - ac + (a-1)\} = 0$

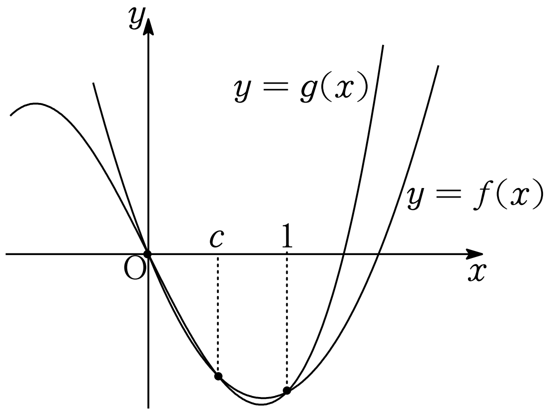
$c(c-1)\{c - (a-1)\} = 0$

すなわち　$c(c-1)(c-a+1) = 0$

$0 < c < 1$ より　$c \neq 0,\ 1$　であるから　$a = c + 1$

②′ より　$b = -c - 2$

よって　$\boldsymbol{f(x) = (c+1)x^2 - (c+2)x}$　← 求めた a, b を代入



(2)　$g(x) = x^3 - 2x$　とおく．

差をとって大小関係を調べる!

$g(x) - f(x) = x^3 - (c+1)x^2 + cx = x(x-c)(x-1)$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は　$x = 0,\ c,\ 1$

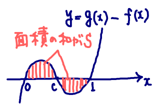
$$\begin{cases} g(x) - f(x) > 0 & (0 < x < c) \\ g(x) - f(x) < 0 & (c < x < 1) \end{cases}$$

このことから

$$S = \int_0^c \{g(x) - f(x)\}\,dx - \int_c^1 \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{c+1}{3}x^3 - \frac{c}{2}x^2\right]_0^c - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{c+1}{3}x^3 - \frac{c}{2}x^2\right]_c^1$$

$$= 2\left(\frac{c^4}{4} - \frac{c+1}{3}c^3 - \frac{c}{2}c^2\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{c+1}{3} - \frac{c}{2}\right)$$



よって　$\boldsymbol{S = -\dfrac{1}{6}c^4 + \dfrac{1}{3}c^3 - \dfrac{1}{6}c + \dfrac{1}{12}}$　$(0 < c < 1)$　← c の4次関数

(3)　$S = S(c)$ として

$$S'(c) = -\frac{2}{3}c^3 + c^2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}(4c^3 - 6c^2 + 1)$$

$$= -\frac{1}{6}(2c-1)(2c^2 - 2c - 1)$$

$$= -\frac{1}{6}(2c-1)\{\underbrace{2c(c-1) - 1}_{\ominus}\}$$

c	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(c)$		$-$	0	$+$	
$S(c)$		↘	最小	↗	

右の増減表より S を最小にする c の値は　$\boldsymbol{c = \dfrac{1}{2}}$