$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$ $(x>0)$ とする．以下の問に答えよ．ただし，自然対数の底 $e$ について，$e=2.718\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを証明なしで用いてよい．

(1)　2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2)　区間 $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減，極値を調べ，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの概形をかけ．グラフの変曲点は求めなくてよい．

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$，および直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

〔2010　神大 理系 前期〕

〔 解答例 〕

(1)　$f(x)=g(x)$ とすると $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{2\log x}{x^2}$　← 連立!

これより $(x-2)\log x=0$　$\therefore\ x=1,\ 2$

よって 共有点の座標は $\mathbf{(1,\ 0),\ \left(2,\ \dfrac{\log 2}{2}\right)}$

(2)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $(0)$ |

右の増減表になり 極大値 $f(e)=\mathbf{\dfrac{1}{e}}$

同じ極大値

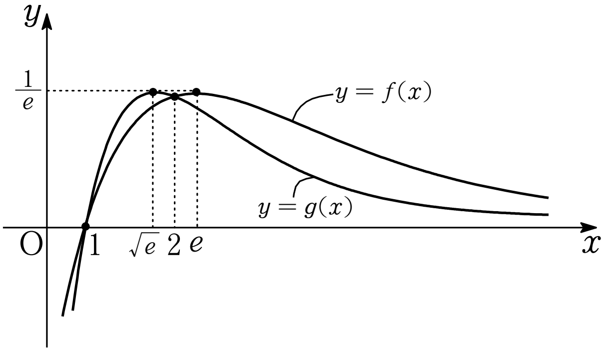
$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$

$g'(x)=\dfrac{2(1-2\log x)}{x^3}$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\sqrt{e}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $(-\infty)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\searrow$ | $(0)$ |

右の増減表になり 極大値 $g(\sqrt{e}\,)=\mathbf{\dfrac{1}{e}}$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフは右図．




(3)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき $f(x)\leqq g(x)$

$2<x\leqq e$ のとき $f(x)>g(x)$

求める面積を $S$ とすると

$$S=\int_1^2\{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_2^e\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{x}\cdot\log x\,dx=\frac{(\log x)^2}{2}+C_1$ ($C_1$は積分定数)

$$\int g(x)\,dx=2\int\frac{1}{x^2}\log x\,dx$$

$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

$$=2\left\{\left(-\frac{1}{x}\right)\log x-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}\ (\because\ \text{部分積分法})$$

$$=2\left(-\frac{\log x}{x}+\int\frac{1}{x^2}\,dx\right)=2\left(-\frac{\log x}{x}-\frac{1}{x}\right)+C_2$$

$$=-\frac{2(\log x+1)}{x}+C_2\ (C_2\ \text{は積分定数})$$

これより

$$S=\left[-\frac{2(\log x+1)}{x}-\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^2+\left[\frac{(\log x)^2}{2}+\frac{2(\log x+1)}{x}\right]_2^e$$

$$=-(\log 2+1)-\frac{(\log 2)^2}{2}+2+\frac{1}{2}+\frac{4}{e}-(\log 2+1)-\frac{(\log 2)^2}{2}$$

よって $S=\boldsymbol{\frac{1}{2}+\frac{4}{e}-(\log 2)^2-2\log 2}$