講義の最後に書いた〔21〕の別解の一部を間違えて書いてしまったので，念のため載せておきます．ごめんなさいでした..

〔 別解例 〕

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k} &= \frac{1}{a+n}+\frac{1}{a+n+1}+\frac{1}{a+n+2}+\cdots\frac{1}{a+n+n}\\ &= \frac{1}{a+n}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{a+n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2}{a+n}}+\cdots+\frac{1}{1+\dfrac{n}{a+n}}\right\}\\ &> \frac{1}{a+n}\left\{1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\frac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right\}\\ &= \frac{n}{a+n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)\\ &= \frac{n}{a+n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots③\end{aligned}$$

①，③ から

$$\frac{n}{a+n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k} < \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a+n}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{a}{n}+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \log 2$$

よって，はさみうちの原理を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k} = \log 2$ であるから証明された．