

$\frac{1}{e} \leq x \leq e$ で定義された関数 $f(x) = x \log x$ に対して、次の問いに答えよ。ここで $\log x$ は x の自然対数であり、 e は自然対数の底である。

- (1) $y = f(x)$ の増減、およびグラフの凹凸を調べて、グラフをかけ。
- (2) 関数 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する。その理由を述べよ。また逆関数 $f^{-1}(x)$ の定義域と値域を求めて、 $y = f^{-1}(x)$ のグラフをかけ。
- (3) 定積分 $\int_0^e f^{-1}(x) dx$ を求めよ。

[2014 広島大 理学部数学科 後期]

[解答例]

(1) $f(x) = x \log x \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e \right)$

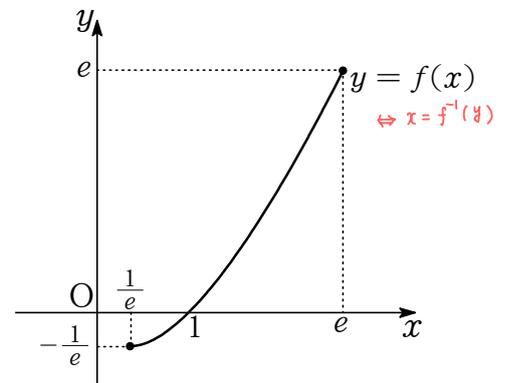
$f'(x) = \log x + 1 \geq 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$

増減表は次のようになる。

x	$\frac{1}{e}$...	e
$f'(x)$		+	
$f''(x)$		+	
$f(x)$	$-\frac{1}{e}$	↗	e

$y = f(x)$ のグラフは右のようになる。



- (2) $\frac{1}{e} \leq x \leq e$ において、 $f(x)$ は単調増加であるから

$y = f(x)$ について、 $-\frac{1}{e} \leq y \leq e$ となる y の値に対して x の値がただ一つ定まる。

よって $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ が存在する。

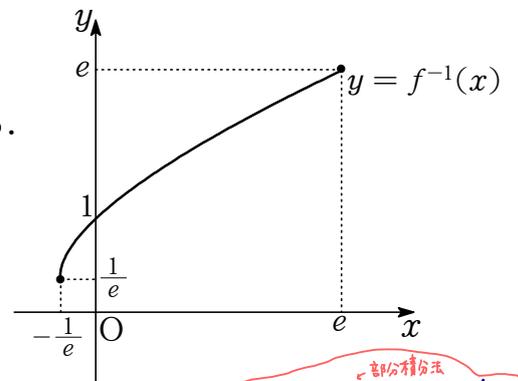
このとき $x = f^{-1}(y) \left(\frac{1}{e} \leq x \leq e, -\frac{1}{e} \leq y \leq e \right)$ である。

x と y を入れ替えて $y = f^{-1}(x) \left(\frac{1}{e} \leq y \leq e, -\frac{1}{e} \leq x \leq e \right)$ ← $f^{-1}(x)$ は求めるべき

よって逆関数 $f^{-1}(x)$ の

定義域は $-\frac{1}{e} \leq x \leq e$ 、値域は $\frac{1}{e} \leq y \leq e$

$y = f^{-1}(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動したグラフであるから、右図のようになる。



(3) $\int_0^e f^{-1}(x) dx = \int_0^e f^{-1}(y) dy$ ← $x = f^{-1}(y)$ を考え y の積分に

$= \int_1^e x \frac{dy}{dx} dx$ $\frac{y}{x} \Big|_0 \rightarrow 1$
 $\frac{x}{x} \Big|_1 \rightarrow e$

$= \int_1^e x f'(x) dx$

$= \left[x f(x) \right]_1^e - \int_1^e f(x) dx$ ← 部分積分法 (図) の時に直接求めることもできる

$= e f(e) - f(1) - \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e$

$= \frac{3e^2 - 1}{4}$

← 部分積分法
 $\int f(x) dx = \int x \log x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$ (Cは積分定数)

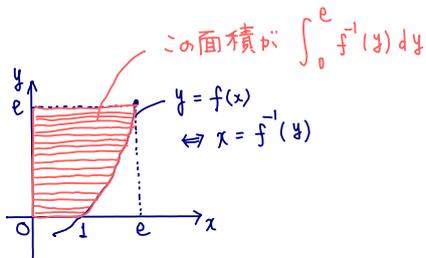
$= e^2 - 0 - \left\{ \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\}$

$$\textcircled{\text{別}} \int_1^e x f'(x) dx = \int_1^e x(\log x + 1) dx = \left[\frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{3e^2 - 1}{4}$$

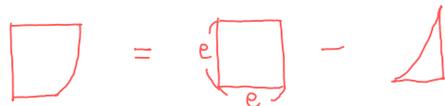
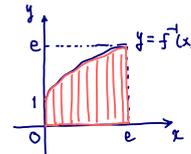
$$\int x(\log x + 1) dx = \frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}(\log x + 1) - \frac{x^2}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

補



(2) のグラフ



$$\int_0^e f^{-1}(y) dy = e^2 - \int_1^e f(x) dx$$

注 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
 $x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$