$t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\displaystyle\int_0^1 |xe^x-tx|\,dx$ とおくとき，次に問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x=tx$ を満たす x をすべて求めよ．

(2)　$S(t)$ を求めよ．

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

〔2010　広大 理系 前期〕

〔解答例〕

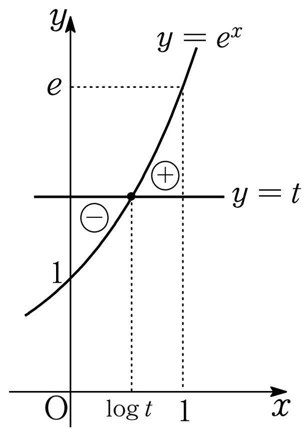
(1)　$xe^x=tx$ より $x(e^x-t)=0$

$x=0$ または $x=\log t$

0≦x≦1 の範囲に x=log t がある場合を考えた

$t>1$ を満たすもとで $0 \leqq \log t \leqq 1$ とすると $1<t \leqq e$

よって $\begin{cases} \boldsymbol{x=0,\ \log t} & \boldsymbol{(1<t \leqq e)} \\ \boldsymbol{x=0} & \boldsymbol{(e<t)} \end{cases}$ ← e<t ならば x=log t は 0≦x≦1 の範囲にない!



(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において

差の形

$|xe^x-tx|=x|e^x-t|$ ← x はくくり出して $\begin{cases} y=e^x \\ y=t \end{cases}$ のグラフを考える!

あ　$1<t \leqq e$ のとき

$$S(t)=-\int_0^{\log t}(xe^x-tx)\,dx+\int_{\log t}^1(xe^x-tx)\,dx$$

$$=-\left[e^x(x-1)-\frac{t}{2}x^2\right]_0^{\log t}+\left[e^x(x-1)-\frac{t}{2}x^2\right]_{\log t}^1$$

$$=-\left\{t(\log t-1)-\frac{t}{2}(\log t)^2+1\right\}-\frac{t}{2}-\left\{t(\log t-1)-\frac{t}{2}(\log t)^2\right\}$$

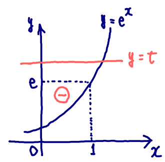
$$=t(\log t)^2-2t\log t+\frac{3}{2}t-1$$

い　$e<t$ のとき

$$S(t)=-\int_0^1(xe^x-tx)\,dx$$

$$=-\left[e^x(x-1)-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{t}{2}-1$$



よって，あ，い より

$$\boldsymbol{S(t)=\begin{cases} t(\log t)^2-2t\log t+\dfrac{3}{2}t-1 & (1<t \leqq e) \\ \dfrac{t}{2}-1 & (e<t) \end{cases}}$$

(3)　$1<t<e$ のとき

t で微分!

e<t のとき グラフは傾き $\frac{1}{2}$ の直線

$S'(t)=\frac{1}{2}>0$

$$S'(t)=(\log t)^2+t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}-2\log t-2t\cdot\frac{1}{t}+\frac{3}{2}$$

$$=(\log t)^2-\frac{1}{2}$$

$$=\left(\log t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\log t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって，右の増減表より

t	(1)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e	$\cdots$	(∞)
$S'(t)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$S(t)$		↘	最小	↗		↗	

$S(t)$ を最小にする t は $\boldsymbol{t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$