

次の問いに答えよ。

(1)  $1 < m \leq n$  を満たす自然数  $m, n$  に対し、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1}$$

(2)  $\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$  の整数部分を求めよ。ただし、実数  $x$  に対して  $a$  が  $x$  の整数部分であるとは、 $a$  が整数であって  $a \leq x < a+1$  が成り立つことをいう。また、正の実数  $x$  の自然対数を  $\log x$  とし、 $\log 2 = 0.69$ ,  $\log 3 = 1.10$ ,  $\log 2020 = 7.61$  とする。

[2020 大阪市大 理系 前期]

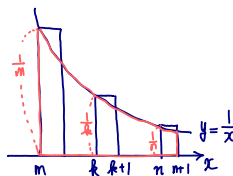
[ 解答例 ]

(1) 関数  $y = \frac{1}{x}$  は  $x > 0$  において単調減少であるから、 $k$  を自然数として

$k < x < k+1$  のとき  $\frac{1}{x} < \frac{1}{k}$  が成り立つから

$$\sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

すなわち  $\int_m^{n+1} \frac{dx}{x} < \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \dots\dots \textcircled{A}$

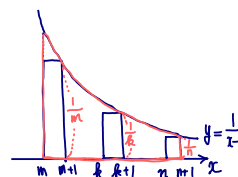


は成り立つ。

また  $k < x < k+1$  のとき  $\frac{1}{k} < \frac{1}{x-1}$  が成り立つから

$$\sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx < \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x-1} dx$$

すなわち  $\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} < \int_m^{n+1} \frac{dx}{x-1} \dots\dots \textcircled{B}$



は成り立つ。

よって、 $\textcircled{A}$ ,  $\textcircled{B}$  より示された。

(2)  $\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2000} + \sum_{k=3}^{2019} \frac{1}{k}$

$> \frac{3}{2} + \int_3^{2020} \frac{dx}{x} \quad (\because \textcircled{A})$

$= \frac{3}{2} + \left[ \log x \right]_3^{2020} = \frac{3}{2} + \log 2020 - \log 3 = 1.5 + 7.61 - 1.10$   
 $= 8.01$

$\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{k}$

$< 1 + \int_2^{2021} \frac{dx}{x-1} \quad (\because \textcircled{B})$

$= 1 + \left[ \log(x-1) \right]_2^{2021} = 1 + \log 2020 = 1 + 7.61$   
 $= 8.61$

よって  $8.01 < \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 8.61$  であるから  $\sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k}$  の整数部分は 8

(2) は (1) を示したとき  
 $\square \leq \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < \square + 1$   
 整数  
 とする  $\square$  を求める!

$\leftarrow 8 \leq \sum_{k=1}^{2020} \frac{1}{k} < 9$