次の問いに答えよ．

(1)　0 以上の整数 n に対し，$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ とおくとき，

$C_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} C_n$ を示せ．ただし，$\cos^0 x = 1$ と定める．

(2)　座標空間内で，連立不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 1,\ \ z + 2x^2 - x^4 \leqq 1,\ \ x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0$$

の表す領域の体積を求めよ．

〔2016　大阪市大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　$n \geqq 0$ に対し，部分積分法より

cos x を出して部分積分

$$C_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n+1} x\,dx$$

せ

$$= \Big[\sin x \cdot \cos^{n+1} x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (n+1)\cos^n x(-\sin x)\,dx$$

び

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^n x\,dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\cos^n x\,dx$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx \right)$$

$$= (n+1)\big(C_n - C_{n+2}\big)$$

よって　$C_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} C_n$　……Ⓐ

(2)　平面 $x = t$ における断面積を $S(t)$ とする．

不等式に x が多くあるので
平面 x=t の断面を考えるのがよい

断面を yz 平面に正射影すると

$$t^2 + y^2 \leqq 1,\ \ z + 2t^2 - t^4 \leqq 1,\ \ t \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0$$

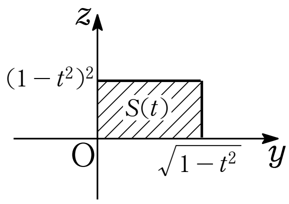
すなわち　$y^2 \leqq 1 - t^2$，$z \leqq (1 - t^2)^2$，$t \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$

断面が存在するのは　$t \geqq 0$　かつ　$1 - t^2 \geqq 0$　であるから　$0 \leqq t \leqq 1$

平面 x=t における断面は
長方形

このもとで　$0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - t^2}$　かつ　$0 \leqq z \leqq (1 - t^2)^2$

これより



$$S(t) = \sqrt{1 - t^2} \cdot (1 - t^2)^2 = (1 - t^2)^{\frac{5}{2}}$$

求める体積を V とすると

$$V = \int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{5}{2}}\,dt$$

$t = \sin\theta$　と置換すると

t	0	→	1
θ	0	→	$\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dt}{d\theta} = \cos\theta$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)^{\frac{5}{2}} \frac{dt}{d\theta}\,d\theta$$

Ⓐで n=6

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}} \cos\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta$$

$$= C_6 = \frac{5}{6}C_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}C_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}C_0 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \quad (\because Ⓐ)$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}$$