次の極限が有限の値となるように定数 a，b を定め，そのときの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

〔2002　大阪市立大 理系 前期〕

〔解答例〕

$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\sqrt{9-8x+2\cos 2x}-(a+bx)\right\}=0$ が必要であるから

$$\sqrt{9+7}-a=0 \quad \therefore a=4$$

$\frac{0}{0}$ の不定形

このとき（与式）$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(4+bx)}{x^2}$

分子の有理化！ 分母・分子に $\sqrt{9-8x+7\cos x}+(4+bx)$ をかけた

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(9-8x+7\cos 2x)-(4+bx)^2}{x^2\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{9-8x+7(1-2\sin^2 x)\}-(16+8bx+b^2x^2)}{x^2\{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+(4+bx)\}}$$

← $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

分子を整理

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2x^2-8(b+1)x-14\sin^2 x}{x^2(\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx)}$$

ここで $b\neq -1$ として

分母・分子を x^2 でわった

$$（与式）=\lim_{x\to 0}\frac{-b^2-\dfrac{8(b+1)}{x}-14\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4+bx}$$

$b\neq -1$ とすると $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{b+1}{x}$ が発散する

これは発散するので不適である．

$b=-1$ として

$$= \frac{-1-14}{\sqrt{9+7}+4}$$

$$（与式）=\lim_{x\to 0}\frac{-1-14\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}+4-x}=\frac{-15}{8}$$

よって，有限な値となるのは $\boldsymbol{a=4,\ b=-1}$，そのときの極限値は $\boldsymbol{-\dfrac{15}{8}}$