関数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2+\sin x\cos x$ が，区間 $0<x<\frac{\pi}{2}$ で極大値と極小値をもつための実数 a の値の範囲を求めよ．

〔2000　信州大〕

〔解答例〕

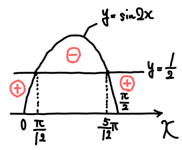
$f(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{\sin 2x}{2}$

$f'(x)=x-a+\cos 2x=x+\cos 2x-a$　← 差の形!!

$g(x)=x+\cos 2x$ とおくと $f'(x)=g(x)-a$　← $\begin{cases} y=g(x) \\ y=a \end{cases}$ のグラフを考える!

$g'(x)=1-2\sin 2x=2\left(\frac{1}{2}-\sin 2x\right)$　← $g(x)$ の増減を調べる

$\begin{cases} y=\frac{1}{2} \\ y=\sin 2x \end{cases}$ のグラフを考える!



$g'(x)=0$ とすると　$\sin 2x=\frac{1}{2}$

$0<2x<\pi$ より　$2x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$　　$\therefore x=\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$	$\cdots$	$\frac{5}{12}\pi$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$g(x)$	(1)	↗	$\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

$f'(x)$ が正から負，負から正になる実数 x が存在するから $\begin{cases} y=g(x) \\ y=a \end{cases}$ のグラフを考えて

$$\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\pi}{2}-1,}$$

$$\boldsymbol{1<a<\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$