座標平面上に 2 点 A(1, 0)，B(−1, 0) と直線 ℓ があり，A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 1 であるという．以下の問に答えよ．

(1)　ℓ は y 軸に平行でないことを示せ．

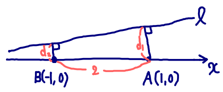
(2)　ℓ が線分 AB と交わるとき，ℓ の傾きを求めよ．

(3)　ℓ が線分 AB と交わらないとき，ℓ と原点の距離を求めよ．

〔2012　神大 前期〕

〔解答例〕

点 A と直線 ℓ の距離を d_1，点 B と直線 ℓ の距離を d_2 とすると



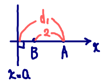
$d_1 + d_2 = 1$ ……①

AB = 2

(1)　ℓ が y 軸に平行であると仮定すると $\ell : x = a$

となる a が存在し，x 軸と ℓ の交点を C とする．

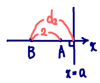
あ　$a \leqq -1$ のとき



AC ≧ AB より $d_1 \geqq 2$，　$d_2 \geqq 0$

$d_1 + d_2 \geqq 2$ であるから ① を満たさない．

い　$1 \leqq a$ のとき



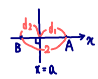
AC ≧ AB より $d_2 \geqq 2$，　$d_1 \geqq 0$

$d_1 + d_2 \geqq 2$ であるから ① を満たさない．

う　$-1 < a < 1$ のとき

AC + BC = AB より $d_1 + d_2 = 2$ であるから ① を満たさない．

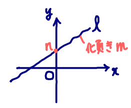
よって，あ，い，う より a は存在しないので，ℓ は y 軸に平行ではない．



(2)　ℓ の傾きを m ……☆　← (1)より ℓは傾きをもつ

y 切片を n とすると　$\ell : y = mx + n$　すなわち　$mx - y + n = 0$

$d_1 = \dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，$d_2 = \dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$　より ① は　$\dfrac{|m+n| + |-m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$



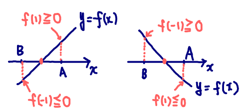
両辺 $\sqrt{m^2+1}$ をかけて　$|m+n| + |-m+n| = \sqrt{m^2+1}$

両辺正より 2 乗して　↙絶対値記号をはずすことを考える

$$(m+n)^2 + 2|(m+n)(-m+n)| + (-m+n)^2 = m^2 + 1 \quad \cdots\cdots ②$$

$f(x) = mx + n$

とおくと　$f(1) = m + n$，$f(-1) = -m + n$



ℓ は線分 AB と交わるので　$f(-1)f(1) \leqq 0$　であるから

$\begin{cases} f(-1) \leqq 0 \\ f(1) \geqq 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(-1) \geqq 0 \\ f(1) \leqq 0 \end{cases}$ ⇔ $f(-1)f(1) \leqq 0$

$(m+n)(-m+n) \leqq 0$　← 絶対値記号の中身は0以下

これより ② は　$(m+n)^2 - 2(m+n)(-m+n) + (-m+n)^2 = m^2 + 1$

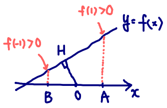
$m^2 + 2mn + n^2 - 2(-m^2 + n^2) + m^2 - 2mn + n^2 = m^2 + 1$

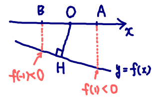
$3m^2 = 1$

すなわち　$m^2 = \dfrac{1}{3}$　　$\therefore m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　↖絶対値記号をはずした

よって ☆ より ℓ の傾きは $\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

(3)　(2) と同じ設定とする．





O から ℓ へ垂線 OH を下すと $\mathrm{OH}=\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$ ……★

ℓ が線分 AB と交わらないので $f(-1)f(1)>0$ であるから

$\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow f(-1)f(1)>0$

$(m+n)(-m+n)>0$ ← 絶対値記号の中身は正

これより ② は $(m+n)^2+2(m+n)(-m+n)+(-m+n)^2=m^2+1$

絶対値記号をはずした

$m^2+2mn+n^2+2(-m^2+n^2)+m^2-2mn+n^2=m^2+1$

$4n^2=m^2+1$

整理して $\dfrac{n^2}{m^2+1}=\dfrac{1}{4}$ すなわち $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{1}{2}$

よって ★ から $\mathrm{OH}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

〔 別解例 〕

(1)　ℓ が y 軸に平行であると仮定すると $\ell : x=a$

となる a が存在し，x 軸と ℓ の交点を C とする．

三角不等式から

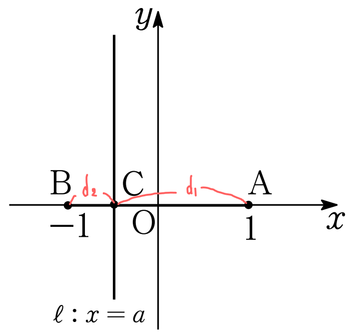
$|X|+|Y|\geqq|X+Y|$

$\mathrm{AC}+\mathrm{CB}$

$=|1-a|+|a+1|\geqq|(1-a)+(a+1)|=|2|=2$

これより $d_1+d_2\geqq 2$ であるから ① を満たさない．

よって ℓ は y 軸に平行ではない．



(2)　$m\geqq 0$ のとき

点 B を通り，ℓ に平行な直線を ℓ' とする．

点 A から ℓ' に垂線 AT を下すと

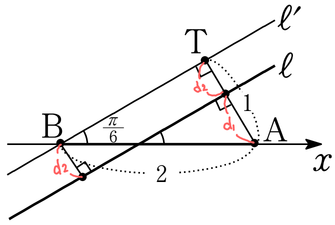
$\mathrm{AT}=d_1+d_2=1$，$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{ATB}=\dfrac{\pi}{2}$

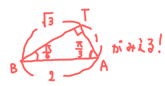
これより $\angle\mathrm{ABT}=\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ m=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$m<0$ のときも同様で $m=-\tan\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって ℓ の傾きは $\pm\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$



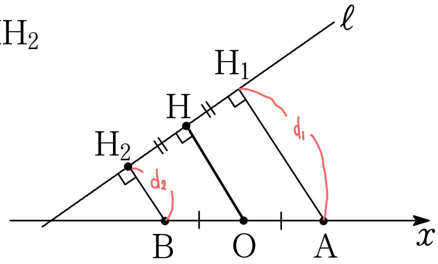


(2) (3) は 図形的に解くこともできる!

(3)　2 点 A，B から ℓ へそれぞれ垂線 $\mathrm{AH_1}$，$\mathrm{BH_2}$ を下ろすと

$\mathrm{OH}\parallel\mathrm{OH_1}\parallel\mathrm{OH_2}$ かつ $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ より $\mathrm{HH_1}=\mathrm{HH_2}$

よって $\mathrm{OH}=\dfrac{d_1+d_2}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$



〔別解例 2〕

（2）　ℓ の傾きを m ……☆

y 切片を n とすると　$\ell : y = mx + n$　すなわち　$mx - y + n = 0$

$d_1 = \dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，$d_2 = \dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$　より　$d_1 + d_2 = \dfrac{|m+n| + |-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$

$f(x) = mx + n$ とおくと　$f(1) = m + n$，$f(-1) = -m + n$　となり

$$d_1 + d_2 = \frac{|f(1)| + |f(-1)|}{\sqrt{m^2+1}}$$

傾きの正負で場合分け

あ　$m \geqq 0$ のとき

$\begin{cases} f(1) \geqq 0 \\ f(-1) \leqq 0 \end{cases}$　となるので　$d_1 + d_2 = \dfrac{f(1) - f(-1)}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{2m}{\sqrt{m^2+1}}$

い　$m < 0$ のとき

$\begin{cases} f(1) \leqq 0 \\ f(-1) \geqq 0 \end{cases}$　となるので　$d_1 + d_2 = \dfrac{-f(1) + f(-1)}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{-2m}{\sqrt{m^2+1}}$

あ，い より　$d_1 + d_2 = \dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}$　←あ，いは絶対値記号で1つにできる

① から $1 = \dfrac{2|m|}{\sqrt{m^2+1}}$　すなわち　$m^2 = \dfrac{1}{3}$　　$\therefore m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　☆ より ℓ の傾きは $\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

（3）　（2）と同じ設定とする．

O から ℓ へ垂線 OH を下すと　$\mathrm{OH} = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$　……★

$f(0) = n$

y切片の正負で場合分け

ア　$n > 0$ のとき

$\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$　となるので　$d_1 + d_2 = \dfrac{f(1) + f(-1)}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{2n}{\sqrt{m^2+1}}$

イ　$n < 0$ のとき

$\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases}$　となるので　$d_1 + d_2 = \dfrac{-f(1) - f(-1)}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{-2n}{\sqrt{m^2+1}}$

ア，イ より　$d_1 + d_2 = \dfrac{2|n|}{\sqrt{m^2+1}}$　←ア，イは絶対値記号で1つにできる

① から $1 = \dfrac{2|n|}{\sqrt{m^2+1}}$　すなわち　$\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{1}{2}$

よって　★ から　$\mathrm{OH} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$