どんな正の数 x, y に対しても不等式 $(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4)$ が成り立つような c の範囲を求めよ．

〔 解答例 〕

どんな正の数 x, y に対しても不等式

$$(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4) \quad \cdots\cdots ⊛$$

← 各項が4次式（同次式）なので比を固まりにできる

が成り立つ c の範囲を求める．

⊛の両辺を y^4 (>0) で割っても同値で

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^4 \leqq c^3\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^4+1\right\}$$

$\dfrac{x}{y}=t$ とおくと，$t>0$ であり

両辺を t^4+1 (>0) でわった　　定数 c^3 を分離

$$(t+1)^4 \leqq c^3(t^4+1) \quad すなわち \quad \frac{(t+1)^4}{t^4+1} \leqq c^3 \quad \cdots\cdots ⊛'$$

⊛′ がすべての正の実数 t に対して成り立つ．

$$f(t)=\frac{(t+1)^4}{t^4+1}$$

とすると

$$f'(t)=\frac{4(t+1)^3(t^4+1)-(t+1)^4\cdot 4t^3}{(t^4+1)^2}=\frac{4(t+1)^3\{(t^4+1)-(t+1)t^3\}}{(t^4+1)^2}$$

$$=\frac{4(t+1)^3(1-t^3)}{(t^4+1)^2}$$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	8	↘	

増減表より　$f(t) \leqq 8$　　← ($f(t)$の最大値) $\leqq c^3$

⊛′ がすべての正の実数 t に対して成り立つので　$8 \leqq c^3$

よって　$\boldsymbol{2 \leqq c}$