a が実数とする．すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする．

(1)　a および $f'(0)$ の値を求めよ．

(2)　導関数 $f'(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

(3)　右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ．さらに，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ．

〔解答例〕

$$f(x)=|x|(e^{2x}+a)=\begin{cases}x(e^{2x}+a) & (x\geqq 0)\\ -x(e^{2x}+a) & (x<0)\end{cases}$$

$f(0)=0$

(1)　$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to+0}(\overset{1}{e^{2h}}+a)=1+a$ ……①

$\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h(e^{2h}+a)}{h}=\lim_{h\to-0}\{-(\underset{1}{e^{2h}}+a)\}=-1-a$ ……②

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるので $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ が存在する．

①＝② として　$1+a=-1-a$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$

このとき　$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$ であるから　$\boldsymbol{f'(0)=0}$

(2)　$f(x)=|x|(e^{2x}+a)=\begin{cases}x(e^{2x}-1) & (x\geqq 0)\\ -x(e^{2x}-1) & (x<0)\end{cases}$　　↓ 積の微分

$$f'(x)=\begin{cases}(e^{2x}-1)+x\cdot 2e^{2x}=(2x+1)e^{2x}-1 & (x>0)\\ -(e^{2x}-1)-x\cdot 2e^{2x}=-(2x+1)e^{2x}+1 & (x<0)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to+0}\{(2x+1)e^{2x}-1\}=0$ ……③

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f'(x)=\lim_{x\to-0}\{-(2x+1)e^{2x}+1\}=0$ ……④

③＝④ より　$\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=0$

(1) より $f'(0)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)$　← 連続の定義

よって $f'(x)$ は $x=0$ で連続である．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\left(2\overset{1}{e^{2x}}+\overset{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\cdot2\right)=2+2=\boldsymbol{4}$ ……⑤　　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$ を利用！

$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\left\{-\frac{(2x+1)e^{2x}-1}{x}\right\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-0}\left\{-\left(2\underset{1}{e^{2x}}+\underset{1}{\frac{e^{2x}-1}{2x}}\cdot2\right)\right\}=-(2+2)=-4$ ……⑥

⑤ ≠ ⑥ であるから $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}$ は存在しない．　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ は存在しない

よって $f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でない．