数学Ⅲ　積分法
~高校数学のまとめ~

教科書をもとに定義や定理を独自にパネル形式でまとめています．
何度も書き直し，加筆修正を繰り返しており，完成したものではありません．
人によっては不要な部分もあるでしょう．そういうときは読み飛ばしてください．

原始関数

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$

すなわち $F'(x)=f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数**（げんしかんすう）という．

㊖ $(x^2)'=2x$ を満たすので $2x$ の原始関数の 1 つは x^2

不定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，C を定数として

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

と表せて

$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を $f(x)$ の **不定積分**（ふていせきぶん）という．

C を **積分定数**（せきぶんていすう）という．

㊢ 記号 $\int$ は「インテグラル」または「積分」と読む．

㊖ $\displaystyle\int 2x\,dx=x^2+C$（$C$ は積分定数）

積分する

x の関数 $f(x)$ の不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めることを

$f(x)$ を x で **積分する**（せきぶん）という．

x^α の不定積分

α を実数，C を積分定数として x^α の積分は

$\boxed{1}$ $\alpha \neq -1$ ならば $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

$\boxed{2}$ $\alpha = -1$ ならば $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$\dfrac{1}{x^2}$ の積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$

三角関数の積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

指数関数の積分

a は 1 以外の正の定数，C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

$f(px+q)$ の積分

$F'(x)=f(x)$，p，q は定数，$p \neq 0$，C を積分定数とするとき

$$\int f(px+q)\,dx=\frac{1}{p}F(px+q)+C$$

例 $\displaystyle\int \sin(px+q)\,dx=-\frac{1}{p}\cos(px+q)+C$

三角関数の積分 2

C を積分定数とする．

1 $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

2 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

合成関数と積分

$F'(x)=f(x)$，C を積分定数とするとき

$$\int g'(x)f\big(g(x)\big)\,dx=F\big(g(x)\big)+C$$

考 合成関数の微分法を考える．

x^{α} の合成関数と積分

α を実数，C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\alpha \neq -1$ として $\displaystyle\int g'(x)\big\{g(x)\big\}^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}\big\{g(x)\big\}^{\alpha+1}+C$

とくに

$\alpha=-2$ とすると $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\big\{g(x)\big\}^2}\,dx=-\frac{1}{g(x)}+C$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ とすると $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx=2\sqrt{g(x)}+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\log\big|g(x)\big|+C$

例 $g(x)=x^2+1$ とすると　$g'(x)=2x$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^3\,dx=\frac{1}{4}(x^2+1)^4+C$

$\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{x^2+1}+C$

$\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=2\sqrt{x^2+1}+C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\log\,(x^2+1)+C$

三角関数の合成関数と積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int g'(x)\sin g(x)\,dx = -\cos g(x) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int g'(x)\cos g(x)\,dx = \sin g(x) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\,dx = \tan g(x) + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}\,dx = -\frac{1}{\tan g(x)} + C$

例 $g(x) = x^2 + 1$ とすると $g'(x) = 2x$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = -\cos(x^2+1) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int 2x\cos(x^2+1)\,dx = \sin(x^2+1) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2(x^2+1)}\,dx = \tan(x^2+1) + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{2x}{\sin^2(x^2+1)}\,dx = -\frac{1}{\tan(x^2+1)} + C$

指数関数の合成関数と積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int g'(x)a^{g(x)}\,dx = \frac{a^{g(x)}}{\log a} + C$ （a は 1 以外の正の定数）

例 $g(x) = x^2 + 1$ とすると $g'(x) = 2x$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int 2xe^{x^2+1}\,dx = e^{x^2+1} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int 2x\cdot 3^{x^2+1}\,dx = \frac{3^{x^2+1}}{\log 3} + C$

正接の積分

C を積分定数とする．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$

和・差・実数倍の不定積分

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int \{s\,f(x) + t\,g(x)\}\,dx = s\int f(x)\,dx + t\int g(x)\,dx$$

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする．つまり $F'(x)=f(x)$

このとき，2 つの実数 a, b に対して 差 $F(b)-F(a)$ を

関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分**（ていせきぶん）といい $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す．

a をこの定積分の下端（かたん），b を上端（じょうたん）という．

定積分を求めることを $f(x)$ を a から b まで**積分する**という．

また $F(b)-F(a)$ を記号 $\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b$ で表わす．

補 $f(x)$ は負の値をとってもよい．

補 定積分の下端，上端の大小について $a<b$，$a=b$，$a>b$ のいずれであってもよい．

定積分の表記

$F'(x)=f(x)$ として

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

例 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx=\Big[\,\sin x\,\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

和・差・実数倍の定積分

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int_a^b\left\{f(x)+g(x)\right\}dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_a^b\left\{f(x)-g(x)\right\}dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$

$\boxed{3}$ k を実数とするとき $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ をまとめて，関数 $f(x)$，$g(x)$ と実数 s，t に対して

$$\int_a^b\left\{s\,f(x)+t\,g(x)\right\}dx=s\int_a^b f(x)\,dx+t\int_a^b g(x)\,dx$$

例 $\displaystyle\int_1^2 3x^2+5x\,dx=3\int_1^2 x^2\,dx+5\int_1^2 x\,dx$

定積分の性質

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

㊂ $F'(x) = f(x)$ とする.

1 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

2 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b = F(b) - F(a) = -\big\{F(a) - F(b)\big\} = -\Big[\,F(x)\,\Big]_b^a$

$\displaystyle\quad = -\int_b^a f(x)\,dx$

3 $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \Big[\,F(x)\,\Big]_c^a + \Big[\,F(x)\,\Big]_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$

$\displaystyle\quad = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

定積分の基本性質

定積分は変数の取り方に関係なく同じ値になる.

すなわち

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

㊎ $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^\pi \sin t\,dt$

定積分の値

a, b を x によらない定数とする.

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の値 は x に無関係な定数である.

㊎ $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \Big[\,\frac{x^3}{3}\,\Big]_1^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{7}{3}$

微積分学の基本定理

a は定数，$f(x)$ が連続関数のとき $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると $f(x)$

すなわち

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

考 $F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^x = F(x) - F(a)$$

ここで $F(a)$ は定数

よって，x で微分すると $f(x)$

例 $\displaystyle\int_1^x t^2\,dt$ を x で微分すると　x^2

すなわち　$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x t^2\,dt = x^2$

部分積分法

$F'(x)=f(x)$ とするとき

1. $$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

積分　　　　微分

2. $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[\,F(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

積分　　　　微分

㋖ 積の微分法より　$\{F(x)g(x)\}' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$

すなわち　$f(x)g(x) = \{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)$

1. $$\int f(x)g(x)\,dx = \int \Big\{\{F(x)g(x)\}' - F(x)g'(x)\Big\}\,dx$$
$$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

2. $$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b \Big\{\{F(x)g(x)\}' - F'(x)g'(x)\Big\}\,dx$$
$$= \Big[\,F(x)g(x)\,\Big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

補 積 $f(x)g(x)$ の積分をするが，どちらかを積分し，あとから他方を微分する．

補 2 は 1 で積分した形を利用して求めてもよい．

例 1. $$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \quad \big(f(x)=\sin x,\ g(x)=x \text{ とした}\big)$$
$$= -x\cos x + \sin x + C \ (C \text{ は積分定数})$$

2. $$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \Big[\,-x\cos x + \sin x\,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

対数の積分

C を積分定数とする．

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$$

考 部分積分法より

$$\int \log x\,dx = \int 1\cdot\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C$$

表と瞬間部分積分

$f(x)$ を 整式 (多項式) とする.

また $g_k(x)$ の原始関数の 1 つを $g_{k+1}(x)$

つまり $\displaystyle\int g_k(x)\,dx = g_{k+1}(x) + C$ (C は積分定数) とする.

このとき 積分 $\displaystyle\int f(x)g(x)\,dx$ について

次のように部分積分法を表で求める手順がある.

1 右の表のように $f(x)$ を書き,

微分したものを定数になるまで下に書いていく.

2 $g(x)$ を積分したものを $g_1(x)$ として,

$f(x)$ の右に書き, 積分したものを下に書いていく.

	微分	積分
⊕	$f(x)$	$g_1(x)$
⊖	$f'(x)$	$g_2(x)$
⊕	$f''(x)$	$g_3(x)$
⋮	⋮	⋮

3 上から行ごとにかけ算してプラスマイナスを繰り返して足していく.

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + f''(x)g_3(x) - \cdots + C$$

(C は積分定数)

話 世間では瞬間部分積分, USA 式積分と言われるもので, 表に改良してみた.

補 $f(x)$ は整式でなくても式は成り立つが, 整式だと何回か微分すると定数になる.

考 部分積分を実際に計算するとわかる.

$f(x)$ が 1 次式のときは $f'(x)$ が定数 となるので, 部分積分を 1 回用いて

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)\,dx \\ &= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + C\end{aligned}$$

$f(x)$ が 2 次式のときは $f''(x)$ が定数 となるので, 部分積分を 2 回用いて

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)\,dx \\ &= f(x)g_1(x) - \left\{f'(x)g_2(x) - \int f''(x)g_2(x)\,dx\right\} \\ &= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + f''(x)g_3(x) + C\end{aligned}$$

これを繰り返している.

例 $\displaystyle\int x\sin 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$(f(x) = x,\ g(x) = \sin 2x)$

	微分	積分
⊕	x	$-\dfrac{\cos 2x}{2}$
⊖	1	$-\dfrac{\sin 2x}{4}$

例 $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

$(f(x) = x^2,\ g(x) = \cos x)$

	微分	積分
⊕	x^2	$\sin x$
⊖	$2x$	$-\cos x$
⊕	2	$-\sin x$

瞬間部分積分

$f(x)$ を整式，C を積分定数とする．

次の積分は瞬間的に部分積分ができる．

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int \{(\text{整式})\times e^x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)e^x\,dx = e^x\{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \cdots\} + C$$

e^x でくくり，$f(x)$ を微分してプラスマイナスを繰り返してたしていく

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int \{(\text{整式})\times e^{-x}\}\,dx$ の形

$$\int f(x)e^{-x}\,dx = -e^{-x}\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

$-e^{-x}$ でくくり，$f(x)$ を微分してたしていく

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int \{(\text{整式})\times \cos x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)\cos x\,dx$$
$$= f(x)\sin x + f'(x)\cos x + f''(x)(-\sin x) + \cdots + C$$

1 項目は $\cos x$ を積分して $f(x)\sin x$,

2 項目以降は前の項の 2 つの式をそれぞれ微分してかけてたしていく

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int \{(\text{整式})\times \sin x\}\,dx$ の形

$$\int f(x)\sin x\,dx$$
$$= f(x)(-\cos x) + f'(x)\sin x + f''(x)\cos x + \cdots + C$$

1 項目は $\sin x$ を積分して $f(x)(-\cos x)$,

2 項目以降は前の項の 2 つの式をそれぞれ微分してかけてたしていく

例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

（指数関数）×（三角関数）の定積分

C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int e^{-x} \sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int e^{-x} \cos x\,dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C$

㊗補 $e^x \sin x$ と $e^x \cos x$ をそれぞれ微分して考える.

考 $\boxed{1}$ $\begin{cases} (e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x & \cdots\cdots① \\ (e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x & \cdots\cdots② \end{cases}$

① − ② として $\{e^x(\sin x - \cos x)\}' = 2e^x \sin x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

$\boxed{2}$ ① + ② として $\{e^x(\sin x + \cos x)\}' = 2e^x \cos x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)\right\}' = e^x \cos x$

$\boxed{3}$ $\begin{cases} (e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x & \cdots\cdots③ \\ (e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x & \cdots\cdots④ \end{cases}$

③ + ④ として $\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}' = -2e^{-x} \sin x$

$\therefore \left\{-\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

$\boxed{4}$ ③ − ④ として $\{e^{-x}(\sin x - \cos x)\}' = 2e^{-x} \cos x$

$\therefore \left\{\dfrac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x)\right\}' = e^x \sin x$

（指数関数）×（三角関数）の定積分の一般化

a, b を $(a, b) \neq (0, 0)$ となる定数, C を積分定数とする.

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2 + b^2} + C$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx}{a^2 + b^2} + C$

考 $\boxed{1}$ $\begin{cases} (e^{ax} \sin bx)' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx & \cdots\cdots① \\ (e^{ax} \cos bx)' = ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×a − ②×b として $(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx)' = (a^2 + b^2)e^{ax}\sin bx$

$\therefore \left\{\dfrac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2 + b^2}\right\}' = e^{ax}\sin bx$

$\boxed{2}$ ①×b + ②×a として $(be^{ax}\sin bx - ae^{ax}\cos bx)' = (a^2 + b^2)e^{ax}\cos bx$

$\therefore \left\{\dfrac{be^{ax}\sin bx + ae^{ax}\cos bx}{a^2 + b^2}\right\}' = e^{ax}\cos bx$

置換積分法

$f(x)$ は連続関数，$g(x)$ は微分可能な関数かつ $g'(x)$ は連続関数とする．

$x=g(t)$ とおくとき $a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば

$$\frac{dx}{dt}=g'(t),\qquad \begin{array}{c||ccc} x & a & \to & b \\ \hline t & \alpha & \to & \beta \end{array}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)\frac{dx}{dt}dt$$

考 $F'(x)=f(x)$ とすると

$$\big\{F\big(g(t)\big)\big\}'=F'\big(g(t)\big)g'(t)=f\big(g(t)\big)g'(t)$$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt&=\int_\alpha^\beta \big\{F\big(g(t)\big)\big\}'\,dt\\&=\Big[\,F\big(g(t)\big)\,\Big]_\alpha^\beta\\&=F\big(g(\beta)\big)-F\big(g(\alpha)\big)\\&=F(b)-F(a)\\&=\Big[\,F(x)\,\Big]_a^b\\&=\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

要

1 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ を含む積分は $x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と置換する

2 $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ $(a>0)$ を含む積分は $x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ と置換する

例 1 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ について $x=\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$, $\begin{array}{c||ccc} x & 0 & \to & \frac{1}{2} \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{6} \end{array}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

2 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$ について $x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$, $\begin{array}{c||ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{4} \end{array}$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

偶関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 偶関数（ぐうかんすう） という．

偶関数 $y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．

㊎ x^2，x^4，$\cos x$，$|x|$，3，$\cdots$ は偶関数

奇関数

x の関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立つとき

$f(x)$ を 奇関数（きかんすう） という．

奇関数 $y=f(x)$ のグラフは 原点に関して対称である．

㊎ x，x^3，$\sin x$，$\tan x$，$\cdots$ は奇関数

偶関数と奇関数の積

1 $f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とするとき $f(x)g(x)$ は 奇関数 である．

2 $f(x)$，$g(x)$ をともに偶関数とするとき $f(x)g(x)$ は 偶関数 である．

3 $f(x)$，$g(x)$ をともに奇関数とするとき $f(x)g(x)$ は 偶関数 である．

注 整数では（偶数）×（奇数）=（偶数），（奇数）×（奇数）=（奇数）となるが，これとは違う．

考 1 $f(x)$ を偶関数，$g(x)$ を奇関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\{-g(x)\}=-f(x)g(x)=-F(x)$$

よって $F(x)$ は奇関数

2 $f(x)$，$g(x)$ をともに偶関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

$$F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$$

よって $F(x)$ は偶関数

3 $f(x)$，$g(x)$ をともに奇関数とするとき $F(x)=f(x)g(x)$ とおくと

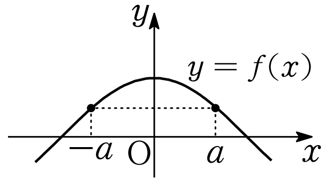
$$F(-x)=f(-x)g(-x)=\{-f(x)\}\{-g(x)\}=f(x)g(x)=F(x)$$

よって $F(x)$ は偶関数

偶関数・奇関数の定積分

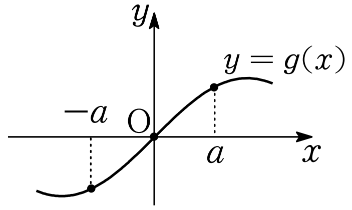
$\boxed{1}$ $f(x)$ が偶関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



$\boxed{2}$ $g(x)$ が奇関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0$$



$\boxed{3}$ $f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が奇関数 ならば

$$\int_{-a}^{a} \{f(x)+g(x)\}\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

㊞補 面積を考えるとわかる．

㊂考 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ について $x=-t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$-a$	→	0
t	a	→	0

$f(x)$ は偶関数であるから $f(-t)=f(t)$ であることに注意して

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,\frac{dx}{dt}dt = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

よって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-a}^{0} g(x)\,dx$ について $x=-t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=-1$，

x	$-a$	→	0
t	a	→	0

$f(x)$ は奇関数であるから $g(-t)=-g(t)$ であることに注意して

$$\int_{-a}^{0} g(x)\,dx = \int_{a}^{0} g(-t)\,\frac{dx}{dt}dt = \int_{a}^{0} g(t)\,dt = -\int_{0}^{a} g(t)\,dt = -\int_{0}^{a} g(x)\,dx$$

よって

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = -\int_{0}^{a} g(x)\,dx + \int_{0}^{a} g(x)\,dx = 0$$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{-a}^{a} \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

㊟例 $\boxed{1}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x\,dx = 0$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + x^3\cos x)\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

整式×指数関数の定積分の漸化式

n を自然数として

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx \quad \text{とおくと} \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

㊢ $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} e^x \, dx = \Big[\, x^{n+1}e^x \,\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x \, dx$ （∵ 部分積分法）

$= e - (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$

よって $\boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$

㊖ $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x e^x \, dx = \Big[\, e^x(x-1) \,\Big]_0^1 = 1$

$I_2 = e - 2I_1 = e - 2 \cdot 1 = e - 2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = -2e + 6$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e+6) = 9e - 24$

$I_5 = e - 5I_4 = e - 5(9e-24) = -44e + 120$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2, \quad \int_0^1 x^3 e^x \, dx = -2e + 6$$

$$\int_0^1 x^4 e^x \, dx = 9e - 24, \quad \int_0^1 x^5 e^x \, dx = -44e + 120$$

㊫ 瞬間部分積分 から直接計算することもできる．

$$\int_0^1 x^5 e^x \, dx = \Big[\, e^x(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) \,\Big]_0^1 = -44e + 120$$

㊙要

定積分の漸化式は基本的に部分積分で変形する．

㊫ ほとんどが部分積分で変形するが， 正接の定積分の漸化式 など例外もある．

対数関数の定積分の漸化式

n を 1 以上の整数として

$$I_n = \int_1^e (\log x)^n\,dx \text{ とおくと } I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

㊔ $I_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1}\,dx = \int_1^e 1\cdot(\log x)^{n+1}\,dx$

$= \Big[\, x(\log x)^{n+1} \,\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}\,dx$ （∵ 部分積分法）

$= e - (n+1)\int_1^e (\log x)^n\,dx$

よって $\boldsymbol{I_{n+1} = e - (n+1)I_n}$

㊞ $I_1 = \int_1^e (\log x)^n\,dx = \Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^e = 1$

$I_2 = e - 2I_1 = e - 2\cdot 1 = e - 2$

$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = -2e + 6$

$I_4 = e - 4I_3 = e - 4(-2e+6) = 9e - 24$

$I_5 = e - 5I_4 = e - 5(9e-24) = -44e + 120$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_1^e (\log x)^2\,dx = e - 2,\quad \int_1^e (\log x)^3\,dx = -2e + 6$$

$$\int_1^e (\log x)^4\,dx = 9e - 24,\quad \int_1^e (\log x)^5\,dx = -44e + 120$$

正弦の定積分の漸化式

n を 0 以上の整数として

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad \text{とおくと} \quad I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$

㊫ $I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx$

$$\begin{aligned}
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n+1}x\,dx\\
&=\Big[-\cos x\cdot\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{-\cos x\cdot(n+1)\sin^n x\cdot\cos x\}\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^n x\,dx\\
&=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx\\
&=(n+1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}x\,dx\right\}\\
&=(n+1)(I_n-I_{n+2})
\end{aligned}$$

$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$ すなわち $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

㊋ $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$I_2=\dfrac{1}{2}I_0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$

$I_3=\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{2}{3}\cdot1=\dfrac{2}{3}$

$I_4=\dfrac{3}{4}I_2=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot I_0=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3}{16}\pi$

$I_5=\dfrac{4}{5}I_3=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot I_1=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot1=\dfrac{8}{15}$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{4},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx=\frac{3}{16}\pi,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx=\frac{8}{15}$$

余弦の定積分の漸化式

n を 0 以上の整数として

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad \text{とおくと} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

㊟
$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos^{n+1} x\,dx \\
&= \Big[\sin x \cdot \cos^{n+1} x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin x \cdot (n+1)\cos^n x \cdot (-\sin x)\}\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^n x\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx \\
&= (n+1)\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} x\,dx\right\} \\
&= (n+1)(I_n - I_{n+2})
\end{aligned}$$

$(n+2)\,I_{n+2} = (n+1)I_n$ すなわち $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

㊎
$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}$$

このことから，次の定積分が求まっている．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{3}{16}\pi,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{8}{15}$$

㊑ 正弦の漸化式 と同じ漸化式

$x = \dfrac{\pi}{2} - t$ と置換するなどでわかる

正接の定積分の漸化式

n を 0 以上の整数として

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \quad \text{とおくと} \quad I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

考 $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \tan^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\tan^n x - \tan^n x\right)dx = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n$

$\displaystyle = \frac{1}{n+1} - I_n$

よって $\boldsymbol{I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n}$

例 $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\log 2}{2}$

$I_2 = 1 - I_0 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

$I_3 = \dfrac{1}{2} - I_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\log 2}{2}$

$I_4 = \dfrac{1}{3} - I_2 = \dfrac{1}{3} - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$

$I_5 = \dfrac{1}{4} - I_3 = \dfrac{1}{4} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\log 2}{2}\right) = \dfrac{\log 2}{2} - \dfrac{1}{4}$

このことから，次の定積分が求まっている．

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^4 x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^5 x\,dx = \frac{\log 2}{2} - \frac{1}{4}$

ベータ関数

m, n を 0 以上の整数として

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

考 m, n を 0 以上の整数として $B(m,n)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$ とおく．

$$B(m+n,0)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx=\left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad\cdots\cdots①$$

部分積分法を用いて

$$B(m,n)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}\,dx$$
$$=-\frac{n}{m+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}\,dx$$

すなわち $\boldsymbol{B(m,n)=-\frac{n}{m+1}B(m+1,n-1)}$

これを繰り返して

$$B(m,n)=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)B(m+2,n-2)$$
$$=\left(-\frac{n}{m+1}\right)\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)B(m+n,0)$$
$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\,\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad(\because ①)$$
$$=\boldsymbol{(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

例 数 Ⅱ で出てくる積分公式の一般化になっている．

$$B(1,1)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=(-1)\frac{1!1!}{3!}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$B(1,2)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=(-1)^2\frac{1!2!}{4!}(\beta-\alpha)^4=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$
$$B(2,1)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=(-1)\frac{1!2!}{4!}(\beta-\alpha)^4=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$
$$B(2,2)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=(-1)^2\frac{2!2!}{5!}(\beta-\alpha)^5=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

補 次のように $(-1)^n$ をなくす変形もある．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

補 大学の数学でのベータ関数は，p，q の関数

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q+1)!}\quad(p,\ q\ は正の実数)$$

として定義する．（階乗の計算を実数に拡張する．）

逆関数の定積分

関数 $f(x)$ は微分可能で $f'(x) > 0$ とする.

関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = bf(b) - af(a)$$

㊔ $y = f(x)$ とおくと $x = g(y)$

y	$f(a)$	$\to$	$f(b)$
x	a	$\to$	b

$$\begin{aligned}\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx &= \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy \quad (\because \text{積分する変数 } x \text{ を } y \text{ にした})\\ &= \int_a^b x\,\frac{dy}{dx}\,dx \quad (\because \text{置換積分})\\ &= \int_a^b x f'(x)\,dx\\ &= \Big[\, xf(x) \,\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx \quad (\because \text{部分積分法})\\ &= bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx = bf(b) - af(a)$

㊓ $0 < a < b$ かつ $0 < f(a) < f(b)$ ならば 右の図のようになる.

面積を考えると

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = T$$

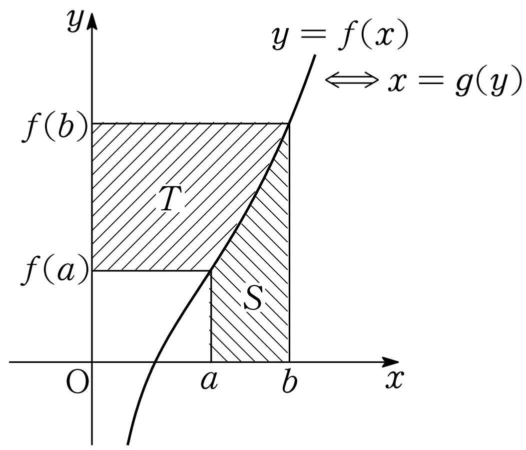
$S + T$ は

2 辺の長さが b, $f(b)$ の長方形の面積から

2 辺の長さが a, $f(a)$ の長方形の面積をひく

ことで求まる.

すなわち $S + T = bf(b) - af(a)$



区分求積法

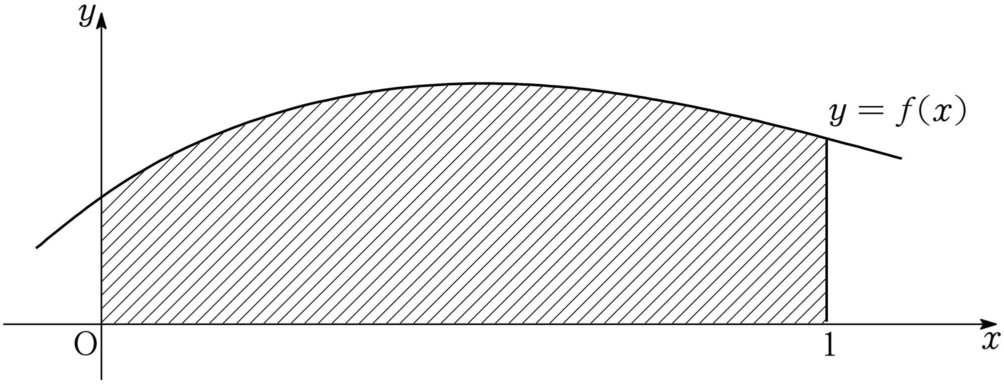
和の極限値として面積や体積を求める方法を **区分求積法**（くぶんきゅうせきほう）という.

区分求積法の公式

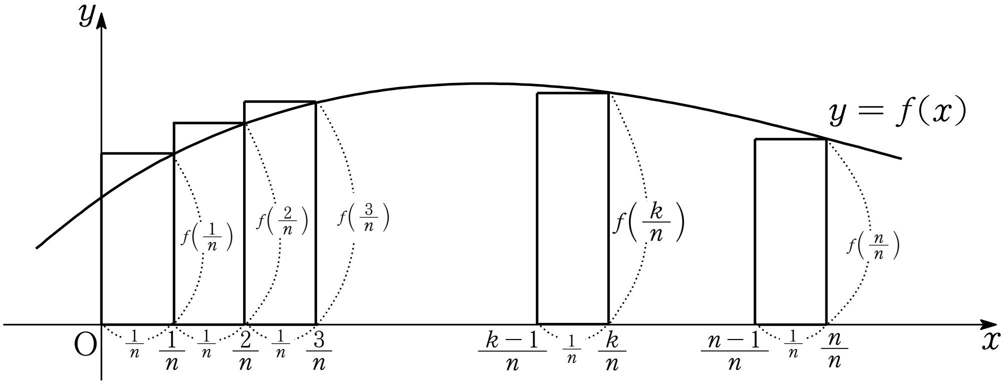
閉区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

考 $0 \leqq x \leqq 1$ となる区間で曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた下図斜線部の面積を考える.
（横幅をだいぶ広くとっているが気にせずに）



$0 \leqq x \leqq 1$ の区間を n 等分して横幅が $\dfrac{1}{n}$，高さが $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の n 個の長方形を作ると



それら n 個の長方形の面積をたしあわせると

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)&=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすると長方形の幅が限りなく 0 になり，これらは面積に収束する.

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

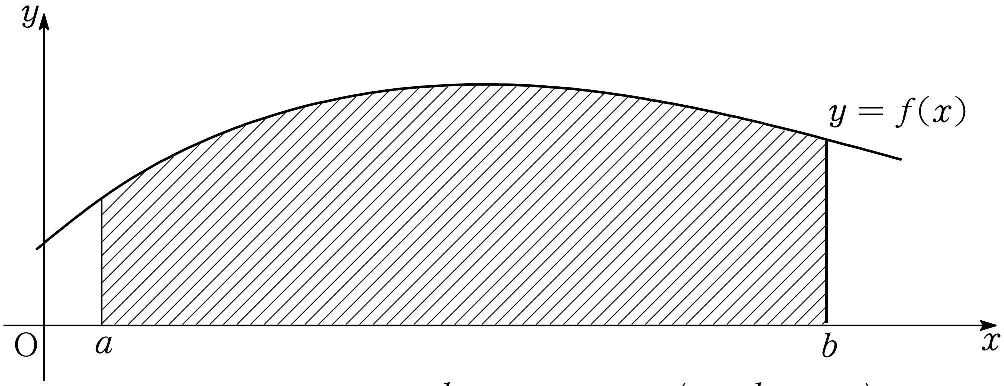
注 高校の教科書では上のように書いてある.
しかし，$f(x) \geqq 0$ とならなくてもこの定理は成り立つ.
面積を使わずに証明することもできる.

一般化した区分求積法

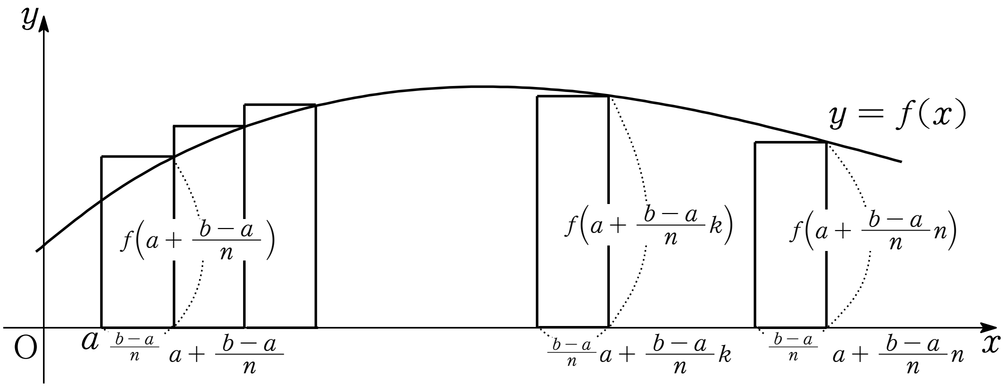
閉区間 $[a,\,b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

㊔ $a \leqq x \leqq b$ となる区間で曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた下図斜線部の面積を考える．



$a \leqq x \leqq b$ の区間を n 等分して横幅が $\dfrac{b-a}{n}$，高さが $f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$ $(k=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ の n 個の長方形を作ると



それら n 個の長方形の面積をたしあわせると

$$\frac{b-a}{n}\left\{f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{b-a}{n}n\right)\right\}=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

$n\to\infty$ とすると長方形の幅が限りなく 0 になり，これらは面積に収束する．

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$

㊟ $f(x)\geqq 0$ とならなくてもこの定理は成り立つ．

(補) $a=0,\,b=1$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

(補) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)\,dx$

(補) 長方形の右上の頂点が $y=f(x)$ 上にあるとしたが，長方形の左上の頂点が $y=f(x)$ 上にあるとしても同様である．

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)=\int_a^b f(x)\,dx$

区分求積法の公式 Ⅱ

閉区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

考 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$ と同じこと．Σ が少しずれても結果は同じ．

区分求積法の準公式

閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=an+p}^{bn+q}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx$$

ただし　a，b，p，q は整数

補 ほとんど $a=0$，$b=1$ となるので，これで使えるようにしておくとよい．

話 $n\to\infty$ とすると，次のイメージ．

$$\frac{1}{n}\to dx$$

$$\sum_{k=an+p}^{bn+q}\to\int_a^b \quad \text{たとえば}\quad \sum_{k=1}^{n}\to\int_0^1,\quad \sum_{k=0}^{n-1}\to\int_0^1 \quad \sum_{k=n+1}^{2n}\to\int_1^2$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right)\to f(x)$$

例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

例 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=5}^{n+3}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

定積分と不等式

閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$ が

つねに $f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

等号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ が成り立つのは 恒等的に $f(x) = 0$

補 $f(x)$ が 0 以上ならば積分しても 0 以上ということ．

補 等号が成り立つのは $a = b$ となる場合もあるが，ここでは $a < b$ としている．

積分評価（不等式）

閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$，$g(x)$ が

つねに $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

等号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ が成り立つのは 恒等的に $f(x) = g(x)$

補 積分は大小関係を保つ．

補 面積をイメージするとよいが，$f(x)$，$g(x)$ が負の値をとっても成り立つ．

考 $[a, b]$ $(a < b)$ において つねに $f(x) \geqq g(x)$ ならば $f(x) - g(x) \geqq 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx \geqq 0$$

よって $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

等号が成り立つのは $f(x) - g(x) = 0$ すなわち $f(x) = g(x)$

定積分と絶対不等式

閉区間 $[a, b]$ $(a < b)$ において，連続関数 $f(x)$，$g(x)$ が次を満たす．

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \geqq \left|\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx\right|$$

等号 $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx = \left|\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx\right|$ が成り立つのは

$a \leqq x \leqq b$ において $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない場合に限る．

考 面積を考える．

補 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ と $g(x)$ の大小関係が変わらない」とは

「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$」または「$a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq g(x)$」のこと．

無限小

関数 $y=f(x)$ の導関数について $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} x\to 0}\frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x}=\frac{dy}{dx}$ とした．

この dy，dx をそれぞれ一つの小さな数として扱い **無限小** という．

㊟ この無限小を認める人，認めない人の両方がいて，使うのは危険かもしれない．
もし認めたら，面積の話で出てくる $\mathit{\Delta} S=f(x)\mathit{\Delta} x$ は $dS=f(x)dx$ と書ける．
認めなければ dy，dx は数として扱えないので $dS=f(x)dx$ と書けない．

(話) 個人的には，高校の数学はそもそも欠陥だらけで誤魔化している部分が沢山あるし，
変形や立式が便利なので，無限小を認めてよいと思っている．
しかし，ものすごく小さい数の世界では，厳密にはおかしいという意見もあり，使うのは気がひける．
だから，自分は無限小はなるべく使わず，使うときは dy，dx ではなく，$\mathit{\Delta} y$，$\mathit{\Delta} x$ を数として，さりげなく扱うことにしている．

定積分と面積 1

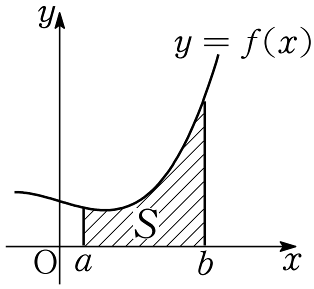
座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ とする．

連続な曲線 $y = f(x)$ と $y = 0$ (x 軸)

および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

$$S = \int_a^b y\,dx \quad \text{または} \quad S = \int_a^b f(x)\,dx$$

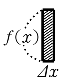


㊫ 大雑把な説明を書いておく．

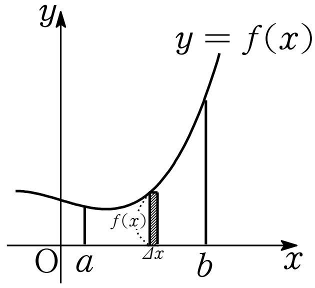
$\int \fallingdotseq S \fallingdotseq \sum$ は「Sum(足し合わせる)」を意味する．

微小面積を $\varDelta S$ とすると

微小な世界では曲がった線も直線にみなせるので長方形の面積より

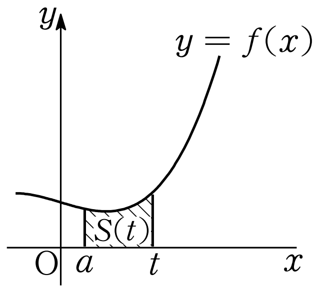
$\varDelta S =$  $= f(x)\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (足し合わせて) 面積は求まる．



㊮ 領域 $a \leqq x \leqq t$，$0 \leqq y \leqq f(x)$ の面積を $S(t)$ ($t \geqq 0$) とすると

$S = S(b) - S(a)$



㋐ $\varDelta t > 0$ のとき

$t \leqq x \leqq t + \varDelta t$ における面積は $S(t + \varDelta t) - S(t)$

$t \leqq x \leqq t + \varDelta t$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m

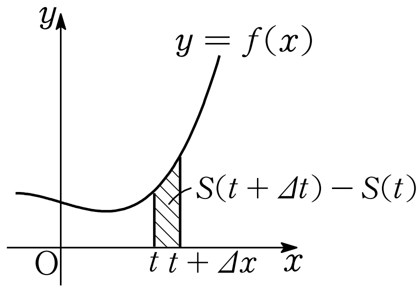
とすると

$$m\varDelta t \leqq S(t + \varDelta t) - S(t) \leqq M\varDelta t$$

各辺 $\varDelta t$ で割って $m \leqq \dfrac{S(t + \varDelta t) - S(t)}{\varDelta t} \leqq M$

ここで $\displaystyle\lim_{\varDelta t \to 0} m = f(t)$，$\displaystyle\lim_{\varDelta t \to 0} M = f(t)$

はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{\varDelta t \to 0} \frac{S(t + \varDelta t) - S(t)}{\varDelta t} = f(t)$



このことから $\dfrac{d}{dt}S(t) = f(t)$ なので $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \Big[\ S(t)\ \Big]_a^b = S(b) - S(a)$

すなわち $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = S$

㋑ $\varDelta t < 0$ のとき，同様にして $m(-\varDelta t) \leqq S(t) - S(t + \varDelta t) \leqq M(-\varDelta t)$

各辺を $-\varDelta t$ で割って $m \leqq \dfrac{S(t + \varDelta t) - S(t)}{\varDelta t} \leqq M$

以下，㋐ と同じように成り立つ．

㊗ $\varDelta S = S(t + \varDelta t) - S(t)$ とおくと上の ㊫ でいう微小面積になり

$$m\varDelta t \leqq \varDelta S \leqq M\varDelta t \quad \text{すなわち} \quad \varDelta S = f(t)\varDelta t$$

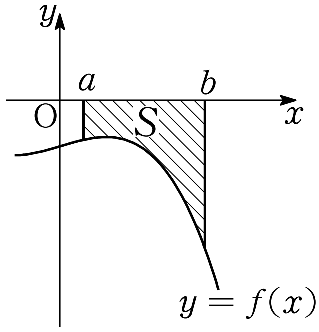
これは $\varDelta S = f(x)\varDelta x$ と同じこと．

定積分と面積 2

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ とする．

連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$ (x 軸) および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

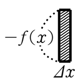


$$S=\int_a^b(-y)\,dx=-\int_a^b y\,dx$$

または

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $-f(x)$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=-f(x)\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (足し合わせて) 面積は求まる．

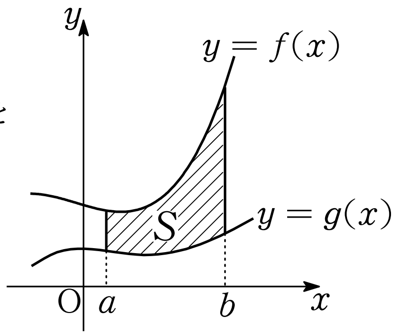
定積分と面積 3

座標平面において，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ とする．

2 つの連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

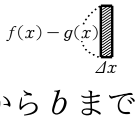


$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

つまり $(\text{面積})=\displaystyle\int_a^b\{(\text{上の関数})-(\text{下の関数})\}\,dx$

補 x 軸は関数 $y=0$ なので，定積分と面積 1，定積分と面積 2 の面積も立式できる．

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $f(x)-g(x)$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\{f(x)-g(x)\}\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (足し合わせて) 面積は求まる．

定積分と面積 4

座標平面において

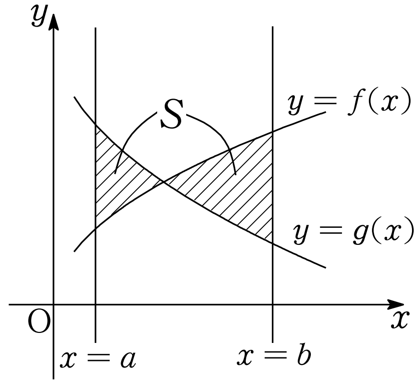
2 つの連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で

囲まれた図形の面積を S とすると

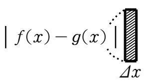
$$S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right| dx$$

つまり (面積) $=\displaystyle\int_a^b$ (関数の差の絶対値) dx



補 面積は区間で分けず，1 つの式で表せる．

考 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ $\left|f(x)-g(x)\right|$ の長方形なので

$\varDelta S=$  $=\left|f(x)-g(x)\right|\cdot\varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して (足し合わせて) 面積は求まる．

定積分と面積 5

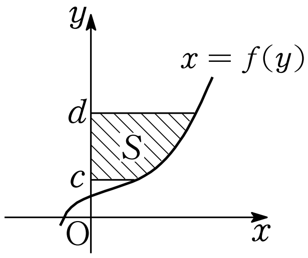
座標平面において，区間 $c \leqq x \leqq d$ で $f(y) \geqq 0$ とする．

連続な曲線 $x=f(y)$ と $x=0$（y 軸）

および 2 直線 $y=c, y=d$ で囲まれた図形の面積を

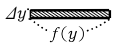
S とすると

$$S=\int_c^d x\,dy \quad \text{または} \quad S=\int_c^d f(y)\,dy$$



補 今まで考えていたことの x と y を入れ替えて考えるだけ．

考 微小面積 ΔS は底辺 $f(y)$，高さ Δy の長方形なので

$\Delta S=$  $=f(y)\cdot\Delta y$

ΔS を c から d まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

定積分と面積 6

座標平面において，区間 $c \leqq x \leqq d$ で $f(y) \geqq g(y)$ とする．

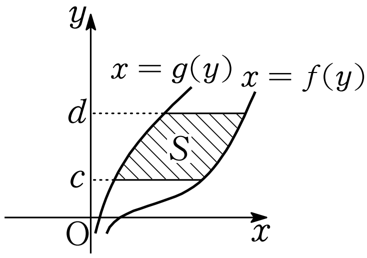
2 つの連続な曲線 $x=f(y)$ と $x=g(y)$

および 2 直線 $y=c,\ y=d$ で囲まれた図形の面積を

S とすると

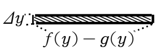
$$S=\int_c^d \{f(y)-g(y)\}\,dy$$

つまり（面積）$=\displaystyle\int_c^d \{(\text{右の関数})-(\text{左の関数})\}\,dy$



補 y 軸は関数 $x=0$ なので，定積分と面積 5 の面積も立式できる．

考 微小面積 ΔS は底辺 $f(y)-g(y)$，高さ Δy の長方形なので

$\Delta S=$  $=\{f(y)-g(y)\}\cdot\Delta y$

ΔS を c から d まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

媒介変数表示された曲線と面積

座標平面の媒介変数 t で表された連続な曲線

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

について，C が境界となる面積を考えるときは置換積分法から求めることができる.

これは曲線 C の形により立式が変わる.

例えば

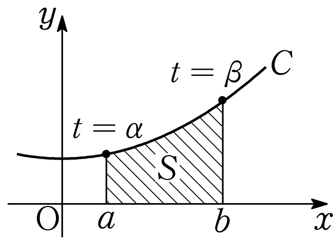
$\alpha \leqq t \leqq \beta$ となる区間で

$y \geqq 0$ かつ $\dfrac{dx}{dt} > 0$，　$f(\alpha) = a$，$f(\beta) = b$ ならば

曲線 C と $y = 0$ (x 軸)

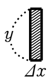
および 2 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた図形の面積を

S とすると



$$S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,\frac{dx}{dt}dt = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)dt$$

考 上では 微小面積 $\varDelta S$ は底辺 $\varDelta x$，高さ y の長方形なので

$\varDelta S =$  $= y \cdot \varDelta x$

$\varDelta S$ を a から b まで求積して（足し合わせて）面積は求まる.

y が x の関数の形にならないときは置換積分をするとよい.

定積分と体積

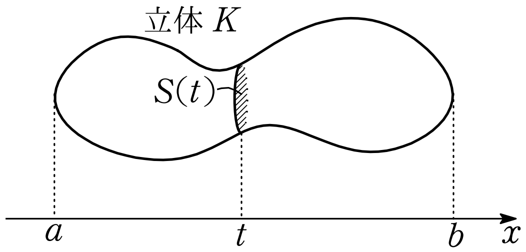
座標空間にある立体 K の体積を V とする．

立体 K が $a \leqq x \leqq b$ に存在し

平面 $x=t$ $(a \leqq t \leqq b)$ における

断面積が $S(t)$ のとき

$$V=\int_a^b S(t)\,dt$$



参 $\boxed{\text{定積分と面積 1}}$ と同じ考え方

考 平面 $x=a$ と平面 $x=t$ の間にある立体 K の体積を $V(t)$ $(t \geqq 0)$ とすると

$V=V(b)-V(a)$

あ $\Delta t>0$ のとき

$t \leqq x \leqq t+\Delta t$ における立体 K の体積は $V(t+\Delta t)-V(t)$

$t \leqq x \leqq t+\Delta t$ において，x 軸に垂直は平面での立体 K の断面積の

最大値を M，最小値を m とすると

$$m\,\Delta t \leqq V(t+\Delta t)-V(t) \leqq M\,\Delta t$$

各辺 Δt で割って　$m \leqq \dfrac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \leqq M$

ここで　$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0} m=S(t)$，$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0} M=S(t)$

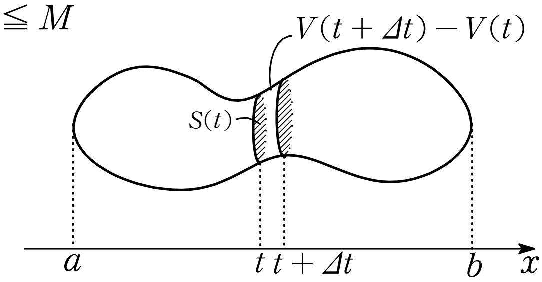
はさみうちの原理を用いて

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=S(t)$$

このことから　$\dfrac{d}{dt}V(t)=S(t)$ なので

$$\int_a^b S(t)\,dt=\Big[\,V(t)\,\Big]_a^b=V(b)-V(a)$$

すなわち　$\displaystyle\int_a^b S(t)\,dt=V$



い $\Delta t<0$ のとき

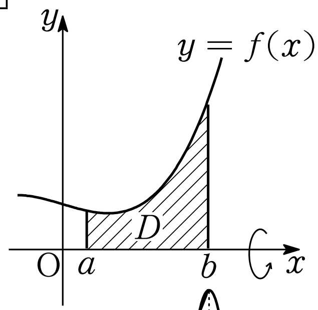
同様にして　$m(-\Delta t) \leqq V(t)-V(t+\Delta t) \leqq M(-\Delta t)$

各辺を $-\Delta t$ で割って　$m \leqq \dfrac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \leqq M$

以下，あ と同じように成り立つ．

補 微小体積を $\Delta V=V(t+\Delta t)-V(t)$ とすると　$\Delta V=S(t)\Delta t$

x 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積



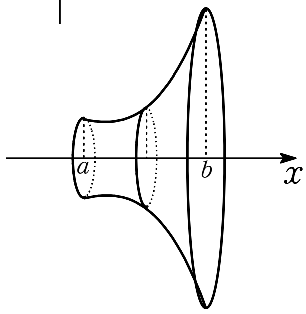
座標空間において

xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$ (x 軸)

および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

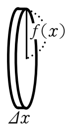
囲まれた図形 D を

x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると



$$V=\int_a^b \pi y^2\,dx$$
$$=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx$$

㊔ 微小体積 $\mathit{\Delta}V$ は底面が半径 $f(x)$ の円，高さが $\mathit{\Delta}x$ の円柱なので

$\mathit{\Delta}V=$  $=\pi\cdot\{f(x)\}^2\mathit{\Delta}x$

$\mathit{\Delta}V$ を a から b まで求積して（足し合わせて）体積は求まる.

x 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 2

座標空間において

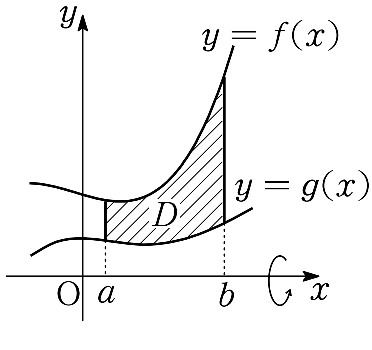
区間 $a\leqq x\leqq b$ で $f(x)\geqq g(x)\geqq 0$ あるいは $f(x)\leqq g(x)\leqq 0$ とする.

xy 平面の連続な 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

囲まれた図形 D を

x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると



$$V=\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\,dx-\int_a^b \pi\{g(x)\}^2\,dx$$
$$=\pi\int_a^b\left(\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right)dx$$

㊟ $V=\displaystyle\int_a^b \pi\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ とするのは間違い.

㊔ 外側の曲線 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積から
内側の曲線 $y=g(x)$ を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積をひく.

y 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積

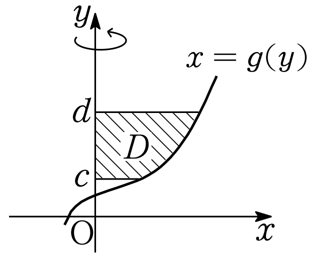
座標空間において

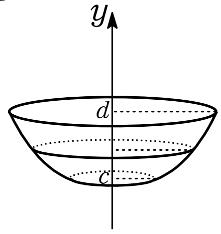
xy 平面の連続な曲線 $x=g(y)$ と $x=0$ (y 軸)

および 2 直線 $y=c, y=d$ $(c<d)$ で

囲まれた図形 D を

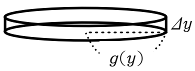
y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると





$$V=\int_c^d \pi x^2\,dy$$
$$=\int_c^d \pi\{g(y)\}^2\,dy$$

考 微小体積 $\varDelta V$ は底面が半径 $g(y)$ の円，高さが $\varDelta y$ の円柱なので

$\varDelta V=$  $=\pi\cdot\{g(y)\}^2\varDelta y$

$\varDelta V$ を c から d まで求積して（足し合わせて）体積は求まる．

y 軸のまわりに曲線を回転させてできる立体の体積 2

座標空間において

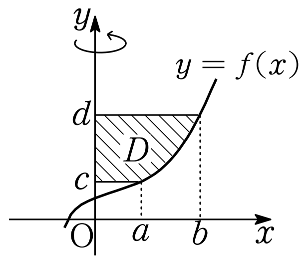
xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $x=0$ (y 軸)

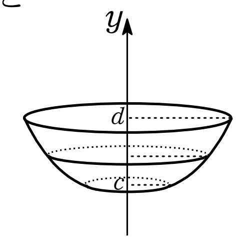
および 2 直線 $y=c, y=d$ $(c<d)$ で

囲まれた図形 D を

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

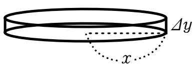
$f(a)=c$，$f(b)=d$ ならば





$$V=\int_c^d \pi x^2\,dy$$
$$=\int_a^b \pi x^2\frac{dy}{dx}dx=\int_a^b \pi x^2 f'(x)dx$$

考 微小体積 $\varDelta V$ は底面が半径 x の円，高さが $\varDelta y$ の円柱なので

$\varDelta V=$  $=\pi\cdot x^2\varDelta y$

$\varDelta V$ を c から d まで求積して（足し合わせて）体積は求まる．

$y=f(x)$ を $x=g(y)$ に変形しなくても x の積分に置換積分することもできる．

y 軸のまわりの回転体と円筒分割（バームクーヘン分割）

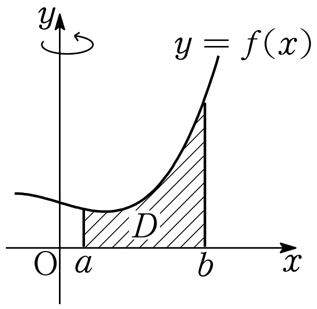
座標空間において

xy 平面の連続な曲線 $y=f(x)$ と $y=0$ (x 軸)

および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

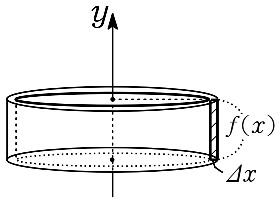
囲まれた図形 D を

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

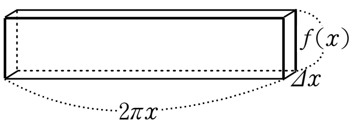


$$V=\int_a^b 2\pi xy\,dx$$
$$=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

考 微小体積 $\varDelta V$ は底面が $\varDelta x$，高さが $f(x)$ の長方形を y 軸のまわりに回転して



これを広げると横が半径 x の円周の長さ $2\pi x$，縦が $\varDelta x$，高さが $f(x)$ の直方体になり

$\varDelta V=$  $=2\pi x\cdot f(x)\varDelta x$

$\varDelta V$ を a から b まで求積して（足し合わせて）体積は求まる．

y 軸のまわりの回転体と円筒分割 2(バームクーヘン分割)

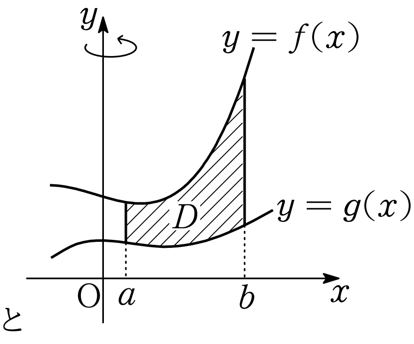
座標空間において

xy 平面の連続な 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$

および 2 直線 $x=a, x=b$ $(a<b)$ で

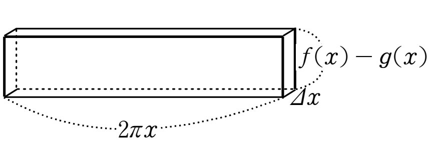
囲まれた図形 D を

y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると



$$V=\int_a^b 2\pi x\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

考 微小体積 $\varDelta V$ は横が $2\pi x$，縦が $\varDelta x$，高さが $f(x)-g(x)$ の直方体になり

$\varDelta V=$  $=2\pi x\cdot\{f(x)-g(x)\}\varDelta x$

$\varDelta V$ を a から b まで求積して（足し合わせて）体積は求まる．

斜回転体の体積（座標軸の設定）

xy 平面に

曲線 $C : y = f(x)$ と 直線 ℓ がある.

右の図のように C と ℓ は x 座標が a と b $(a < b)$

の 2 点 A，B の交点をもつとし，

$a \leqq x \leqq b$ において C と ℓ で囲まれた図形 D を

ℓ のまわりに回転させてできる立体の体積を V とする.

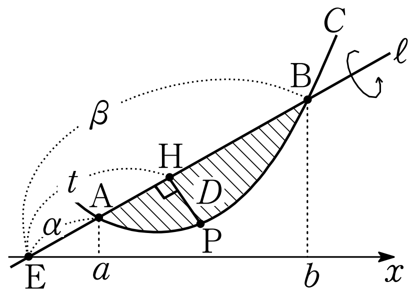
このとき $a \leqq x \leqq b$ における C 上の点を P とし

P を通り ℓ に垂直な直線と ℓ の交点を H とする.

ℓ と x 軸の交点を E とし EH $= t$ とおくと PH は t の関数で表せる.

これらのことから EA $= \alpha$，EB $= \beta$ として

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \pi \mathrm{PH}^2\, dt$$

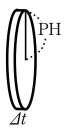


考 E(0, 0) とし，ℓ を t 軸としてみて

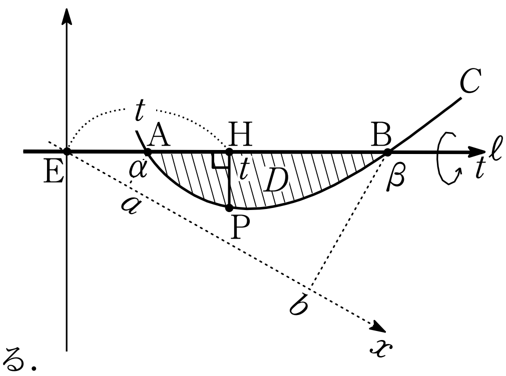
A$(\alpha, 0)$，B$(\beta, 0)$，H$(t, 0)$ となる座標軸を設定する.

微小体積を ΔV とすると

底面が半径 PH の円，高さが Δt の円柱なので

$\Delta V =$  $= \pi \mathrm{PH}^2 \Delta t$

ΔV を α から β まで求積して（足し合わせて）体積は求まる.



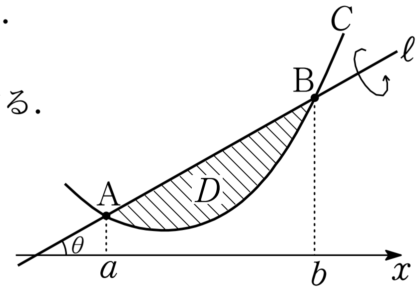
斜回転体の体積（傘型分割）

xy 平面に

曲線 $C : y = f(x)$ と 直線 $\ell : y = g(x)$ がある．

ℓ を x 軸正方向となす角を $\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

右の図のように C と ℓ は x 座標が a と b $(a < b)$ の 2 点 A，B の交点をもつとし，

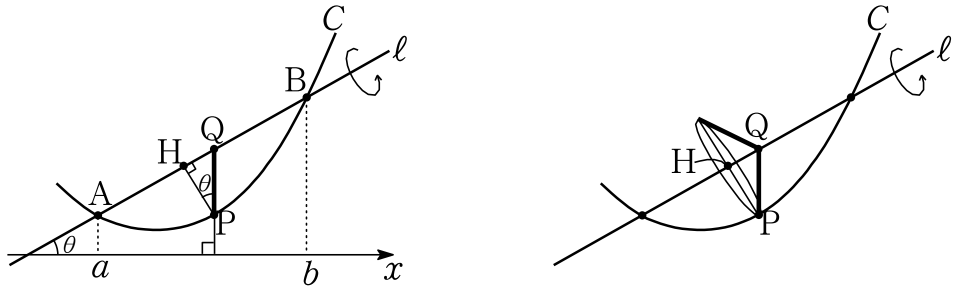


$a \leqq x \leqq b$ において C と ℓ で囲まれた図形 D とする．

D を ℓ のまわりに回転させてできる立体の体積を V とすると

$$V = \int_a^b \pi \{g(x) - f(x)\}^2 \cos\theta \, dx$$

考 点 P から ℓ へ垂線 PH を下ろし，ℓ 上の点で点 P と同じ x 座標の点を Q とすると下図のようになる．



QP $= g(x) - f(x)$

$\angle$QPH $= \theta$ であり　HP $=$ QP$\cos\theta = \{g(x) - f(x)\}\cos\theta$

微小体積 $\varDelta V$ は底面が中心 H，半径 HP の円で頂点が Q の円錐の表面に厚み $\varDelta x$ をつけた立体の体積である．

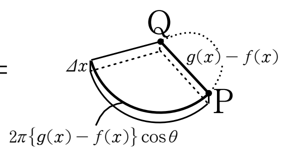
展開して考えると，底面が中心 Q，半径 QP とする扇形，高さが $\varDelta x$ の柱体になる．

底面の扇形の半径は QP $= g(x) - f(x)$

底面の扇形の弧の長さは半径 HP の円の周の長さより

2πHP $=$ QP$\cos\theta = 2\pi\{g(x) - f(x)\}\cos\theta$

これらのことから

$\varDelta V =$ 

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\{g(x) - f(x)\}\cos\theta \cdot \{g(x) - f(x)\}\varDelta x$$
$$= \pi\{g(x) - f(x)\}^2 \cos\theta \varDelta x$$

$\varDelta V$ を a から b まで求積して（足し合わせて）体積は求まる．

補 （扇形の面積）$= \dfrac{1}{2} \times$（弧の長さ）$\times$（半径）

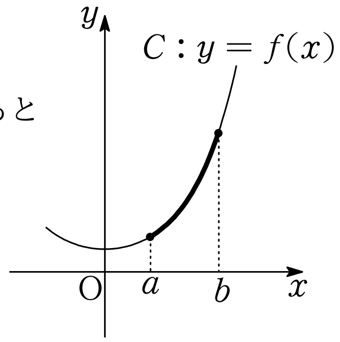
関数が表す曲線の長さ

座標平面の連続な曲線 $C : y = f(x)$ について

曲線 C の $a \leqq x \leqq b$ で表された曲線の長さを L とすると

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$$



㊟ 厳密な証明は高校の範囲をこえるので，無限小での理解でよい．

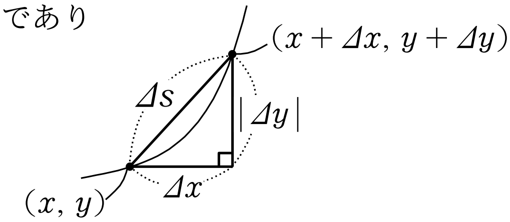
㊫ 曲線を折れ線に分割し，微小な弧長を $\varDelta s$ とする．

$\varDelta s$ は曲線上の 2 点 $(x,\ y)$，$(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ の長さであり

$$\varDelta s = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2\right\}(\varDelta x)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2} \varDelta x$$



$\varDelta s$ を a から b まで求積して（足し合わせて）曲線の長さは求まる．

媒介変数表示された曲線の長さ

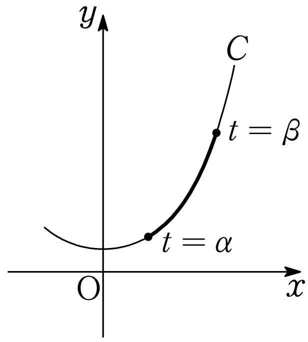
座標平面の媒介変数 t で表された連続な曲線 $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

について

曲線 C の $\alpha \leqq t \leqq \beta$ で表された曲線の長さを L とすると

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}\, dt$$



㊟ 厳密な証明は高校の範囲をこえるので，無限小での理解でよい．

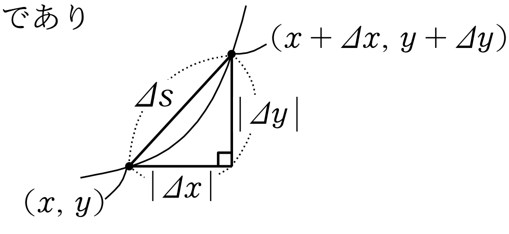
㊫ 曲線を折れ線に分割し，微小な弧長を $\varDelta s$ とする．

$\varDelta s$ は曲線上の 2 点 $(x,\ y)$，$(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ の長さであり

$$\varDelta s = \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}$$

$$= \sqrt{\left\{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2\right\}(\varDelta t)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}\, \varDelta t$$



$\varDelta s$ を α から β まで求積して（足し合わせて）曲線の長さは求まる．

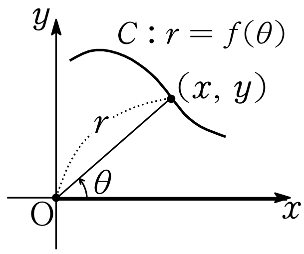
㊓ $x(t) = t$，$y(t) = f(t)$ とすると $\boxed{\text{関数が表す曲線の長さ}}$

極方程式の座標平面での媒介変数表示

極座標において，極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

座標平面で極を O，始線を x 軸正方向とする極座標とすると

媒介変数 θ で表された曲線



$$C : \begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる．

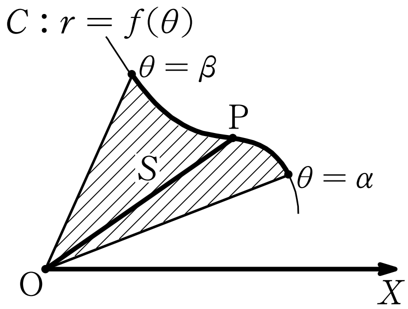
極方程式と面積

極座標において，極を O とする．

極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

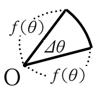
C 上の点 P が $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ をみたしながら動くとき

線分 OP が通過する領域の面積を S とすると



$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \left\{ f(\theta) \right\}^2 d\theta$$

考 微小量 $\varDelta\theta$ に対する微小面積を $\varDelta S$ とすると，半径 $f(\theta)$，中心角 $\varDelta\theta$ の扇形なので

$\varDelta S =$  $= \dfrac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 \varDelta\theta$

$\varDelta S$ を α から β まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

補 **極方程式の座標平面での媒介変数** を考えてもよい．

極方程式と体積

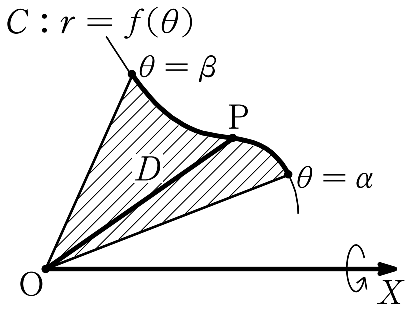
極座標において，極を O とする．

極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

C 上の点 P が $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ をみたしながら動くとき

線分 OP が通過する領域を D とする．

ただし $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi$



D を始線を表す直線のまわりに回転してできる回転体の体積を V とすると

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \, d\theta$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi \{f(\theta)\}^3 \sin\theta \, d\theta$$

補 $\boxed{\text{極方程式の座標平面での媒介変数}}$を考えてもよい．

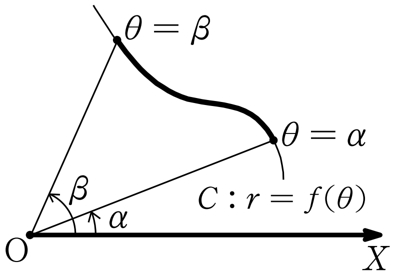
極方程式と曲線の長さ

極座標で極方程式で表される曲線 $C : r = f(\theta)$ について

C の $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ で表される曲線の長さを L とすると

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\left\{f'(\theta)\right\}^2 + \left\{f(\theta)\right\}^2}\, d\theta$$



㊔ 直交座標で極を O，始線を x 軸正方向として，C 上の点を $(x,\, y)$ とすると

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

それぞれ θ で微分して

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

それぞれ 2 乗して

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 = \left\{f'(\theta)\right\}^2\cos^2\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \left\{f(\theta)\right\}^2\sin^2\theta \\ \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left\{f'(\theta)\right\}^2\sin^2\theta + 2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta + \left\{f(\theta)\right\}^2\cos^2\theta \end{cases}$$

これらをたして

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left\{f'(\theta)\right\}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left\{f(\theta)\right\}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \left\{f'(\theta)\right\}^2 + \left\{f(\theta)\right\}^2$$

媒介変数表示された曲線の長さ より

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left\{f'(\theta)\right\}^2 + \left\{f(\theta)\right\}^2}\, d\theta$$

ガウス・グリーンの定理

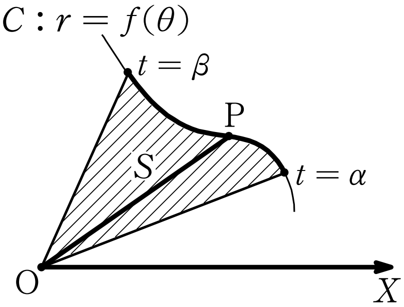
座標平面の媒介変数 t で表された曲線 $C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ について

C 上の点 P が $\alpha \leqq t \leqq \beta$ をみたしながら原点 O の周りを反時計周りに動くとき

線分 OP が通過する領域の面積を S とすると

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \left| x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} \right| dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \left| f(t)g'(t) - g(t)f'(t) \right| dt$$



㊔ O を原点，微小量 $\varDelta t$ に対する x，y の増分を $\varDelta x$，$\varDelta y$ として

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = (x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$

とする．

微小面積を $\varDelta S$ とすると △OPP′ なので

$$\varDelta S = \frac{1}{2} \left| x(y + \varDelta y) - y(x + \varDelta x) \right| = \frac{1}{2} \left| x\varDelta y - y\varDelta x \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| x\frac{\varDelta y}{\varDelta t} - y\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \right| \varDelta t$$

$\varDelta S$ を α から β まで求積して（足し合わせて）面積は求まる．

パップス・ギュルダンの定理

平面上にある図形 F の面積を S とする.

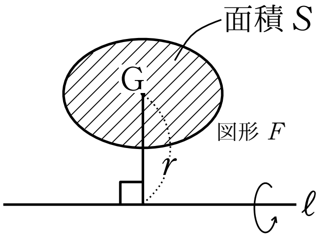
F と同じ平面上にあり F を通らない直線を ℓ とし，

F を ℓ の周りに回転させてできる回転体の体積を V とする.

このとき F の重心 G と直線 ℓ の距離を r として

$$V = 2\pi rS$$

つまり（回転体の体積）$= 2\pi \times$（重心と軸の距離）$\times$（図形の面積）



㊟ 図形 F と ℓ が交わるときは成り立たない.

㊭ 特殊なケースでは証明できるが，一般的な証明は高校数学の範囲をこえる.

㊭ 重心 G を ℓ のまわりに回転すると，半径 r の円周を描き，その長さは $2\pi r$

これに面積をかけると体積になる.