追加問題「整数②」解答例

1.

(1)　703 と 1369 の最大公約数を求めよ．

(2)　(2) で求めた最大公約数を m として，

$$703x + 1369y = m$$

を満たす整数 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

〔解答例〕

(1)　a と b の最大公約数を $g(a,\ b)$ で表す．

$$1369 = 703 \cdot 1 + 666$$
$$703 = 666 \cdot 1 + 37$$
$$666 = 37 \cdot 18 + 0$$

よって，ユークリッドの互除法より $g(1369,\ 703) = g(703,\ 666) = g(666,\ 37) = \mathbf{37}$

(2)　(1) より $703x + 1369y = 37$ すなわち $37 \cdot 19x + 37 \cdot 37y = 37$

両辺 37 で割って

$$19x + 37y = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

① の整数解のひとつに $x = 2,\ y = -1$ があるので

$$19 \cdot 2 + 37 \cdot (-1) = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

①−② として $19(x-2) + 37(y+1) = 0$ すなわち $37(y+1) = 19(2-x)$

$2-x$，$y+1$ はともに整数で，19，37 は互いに素なので，整数 k を用いて

$$\begin{cases} 2 - x = 37k \\ y + 1 = 19k \end{cases}$$

よって $\boldsymbol{(x,\ y) = (-37k + 2,\ 19k - 1)}$　$\boldsymbol{(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)}$

kは整数ということ

2.　$3421_{(5)}$ を p 進法で表すと $1qr3_{(p)}$ となるという．p，q，r を求めよ．ただし，p，q，r は各々 9 以下の自然数とする．

〔解答例〕

一の位が3なので p は4以上　　p進法なので p^2の位とpの位は p-1以下

$1qr3$ が p 進法で表されているので $4 \leqq p$ であり $q \leqq p-1$，$r \leqq p-1$ $\cdots\cdots$①

$$3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = p^3 + qp^2 + rp + 3$$ ← $3421_{(5)} = 1qr3_{(p)}$

となるので

$$483 = p^3 + qp^2 + rp \quad \text{すなわち} \quad 3 \cdot 7 \cdot 23 = p(p^2 + qp + r) \quad \cdots\cdots ②$$

p は 483 の約数になる　$483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$　　積の形

$4 \leqq p \leqq 9$ より $p = 7$　7進法なので

① から $q \leqq 6$，$r \leqq 6$ $\cdots\cdots$①′

このとき ② は $3 \cdot 23 = 7^2 + 7q + r$ すなわち $7q + r = 20$

q，r は自然数で ①′ をみたすので $q = 2$，$r = 6$　← $7 \cdot 2 + 6 = 20$ しかない

よって $\boldsymbol{p = 7,\ q = 2,\ r = 6}$

自然数 x, y, z が

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たすとする．

(1) $x \leqq y \leqq z$ のとき，$(*)$ を満たす組 (x, y, z) をすべて求めよ．

(2) $(*)$ を満たす組 (x, y, z) は全部で何組存在するか．

〔解答例〕

(1) $1 \leqq x \leqq y \leqq z$ より $0 < \overset{\text{小}}{\frac{1}{z}} \leqq \overset{\text{中}}{\frac{1}{y}} \leqq \overset{\text{大}}{\frac{1}{x}}$ であるから　↙ xの不等式を考える!

$$\overset{\text{大}}{\frac{1}{x}} < \overset{\text{大}}{\frac{1}{x}}+\overset{\text{中}}{\frac{1}{y}}+\overset{\text{小}}{\frac{1}{z}} \leqq \overset{\text{大}}{\frac{1}{x}}+\overset{\text{大}}{\frac{1}{x}}+\overset{\text{大}}{\frac{1}{x}} \quad (\text{等号成立は } x=y=z) \quad \cdots\cdots①$$

$(*)$ より $\frac{1}{x} < 1 \leqq \frac{3}{x}$ すなわち $1 < x \leqq 3$

補 $x=1$ とすると $(*)$ は $\underbrace{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}_{+}=0$ ですぐに不適とわかる

x は自然数であるから $x=2, 3$

あ $x=2$ のとき

$(*)$ は $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ $(2 \leqq y \leqq z)$

両辺に $2yz$ をかけて $2z+2y=yz$　↙ 積の形

$yz-2y-2z=0$ すなわち $(y-2)(z-2)=4$

$y-2$, $z-2$ はともに整数，$0 \leqq y-2 \leqq z-2$ であるから

$x-2$	$y-2$	x	y
1	4	3	6
2	2	4	4

い $x=3$ のとき

① の等号が成り立つことから $x=y=z=3$

よって あ，い より $\boldsymbol{(x, y, z)=(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)}$

↖ これは $\underset{\sim\sim\sim}{x \leqq y \leqq z}$ の場合なので x, y, z の大小関係をかえる

(2) x, y, z の大小関係を考えて，(x, y, z) の組は

$3!+3+1=\mathbf{10}$ (組)

x	y	z	
2	3	6	3! (通り)
2	6	3	
3	2	6	
3	6	1	
6	2	3	
6	3	1	
2	4	4	3 (通り)
4	2	4	
4	4	2	
3	3	3	1 (通り)