追加問題「整数 ①」解答例

1.　以下では，$a = 756$ とし，m は自然数とする．

(1)　a を素因数分解すると

$$a = 2^{\boxed{\text{ア}}} \cdot 3^{\boxed{\text{イ}}} \cdot \boxed{\text{ウ}}$$

である．

a の正の約数の個数は $\boxed{\text{エオ}}$ 個である．

(2)　$\sqrt{am}$ が自然数となる最小の自然数 m は $\boxed{\text{カキ}}$ である．$\sqrt{am}$ が自然数となるとき，m はある自然数 k により，$m = \boxed{\text{カキ}}\,k^2$ と表される数であり，そのときの $\sqrt{am}$ の値は $\boxed{\text{クケコ}}\,k$ である．

〔2015　センター本試験（一部削除)〕

〔解答例〕

(1)　$a = 108 \cdot 7 = 2^{\boxed{\mathbf{2}}_{\text{ア}}} \cdot 3^{\boxed{\mathbf{3}}_{\text{イ}}} \cdot \boxed{\mathbf{7}}_{\text{ウ}}$

a の正の約数の個数は $(2+1)(3+1)(1+1) = \boxed{\mathbf{24}}_{\text{エオ}}$

← 指数をすべて偶数に！

(2)　$\sqrt{am}$ が自然数になる最小の自然数 m は　$m = 3 \cdot 7 = \boxed{\mathbf{21}}_{\text{カキ}}$

$\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2}$
$= 2 \cdot 3^2 \cdot 7$
$= 126$

$\sqrt{am}$ が自然数になるとき

$m = 21k^2$（k はある自然数）……①

とおけて

$$\sqrt{am} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 k^2} = 2 \cdot 3^2 \cdot 7k = \boxed{\mathbf{126}}_{\text{クケコ}}\,k^2$$

2.　最大公約数が 30，最小公倍数が 360 である二つの自然数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．ただし，$a < b$ とする．

〔解答例〕

↙ a<bなので

$$\begin{cases} a = 30a' \\ b = 30b' \end{cases} \quad (a',\ b' \text{は互いに素な自然数で}\ \ a' < b')$$

と表せて，最小公倍数が 360 より

$30a'b' = 360$　すなわち　$a'b' = 12$

$\therefore (a',\ b') = (1,\ 12),\ (3,\ 4)$

よって　$(a,\ b) = $ **(30, 360), (90, 120)**

3.

（1）　n を自然数とするとき，n^2 は 4 の倍数かまたは 4 で割った余りが 1 であることを証明せよ．

（2）　自然数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ をみたすとき，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ．

〔 解答例 〕

（1）

n^2 は 4 でわって余りが 0 または 1
（2, 3 にはならない）

あ n が偶数（2 で割った余りが 0）のとき

整数 k を用いて　$n=2k$　と表せて　$n^2=4k^2$

すなわち　n^2 は 4 の倍数である．

い n が奇数（2 で割った余りが 1）のとき

整数 k を用いて　$n=2k+1$　と表せて　$n^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

すなわち　n^2 は 4 で割った余りが 1 である．

よって あ，い より，証明された．

（2）　a，b がともに奇数とすると

い より a^2，b^2 は 4 で割ったときの余りが 1 であるから，整数 ℓ，m が存在して

$$\begin{cases} a^2=4\ell+1 \\ b^2=4m+1 \end{cases}$$

と表せるので　$c^2=a^2+b^2=4(\ell+m)+2$

これより　c^2 は 4 で割って余りが 2 となる．

ところが c は自然数であるから（1）に矛盾する．

よって a，b のうち少なくとも 1 つは偶数であるから証明された．