中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1)　円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

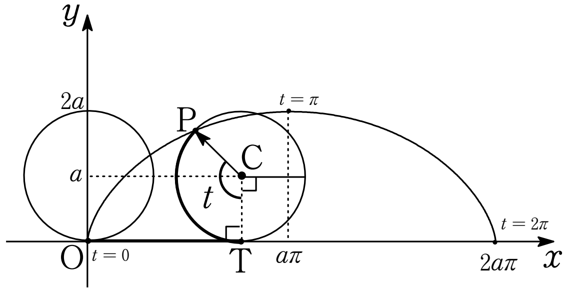
(2)　t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3)　(2) の曲線 C の長さを求めよ．

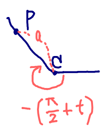
〔2010　九大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　角 t だけ回転したときの円の中心を C,
円と x 軸との接点を T とすると



O(0, 0) として　$\mathrm{OT}=\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=at$



$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=(at,\ a)$$

点 C から x 軸正方向を始線として，
半直線 CP は角 $-\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)$ の動径である．

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=a$ であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(a\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right\},\ a\sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right\}\right)=(-a\sin t,\ -a\cos t)$$

これらのことから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)\right)$

よって　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{a(t-\sin t),\ a(1-\cos t)}\right)$

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{2a\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)\,dt \\
&=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt \\
&=a^2\left[\ \frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{\sin 2t}{4}\ \right]_0^{2\pi} \\
&=\boldsymbol{3a^2\pi}
\end{aligned}$$

$a^2(1-\cos t)^2=a^2(1-2\cos t+\underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1+\cos 2t}{2}})$

$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

(3)　曲線 C の長さを L とすると

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

であることから

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt \\
&=\left[\ -4a\cos\frac{t}{2}\ \right]_0^{2\pi} \\
&=\boldsymbol{8a}
\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ において $0\leqq\frac{t}{2}\leqq\pi$ なので $\sin\frac{t}{2}\geqq 0$