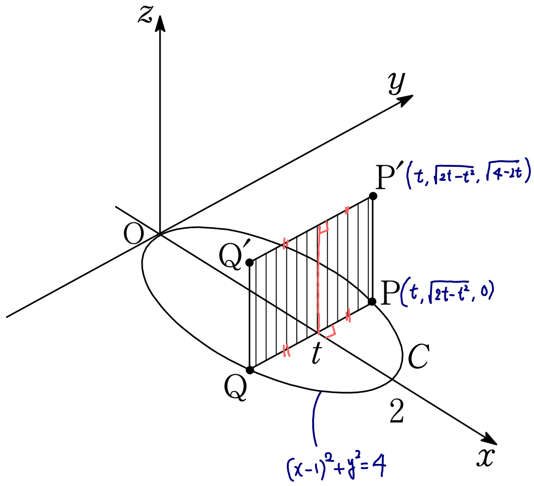
球面 $x^2+y^2+z^2=4$ を S とし，平面 $z=0$ 上の円 $(x-1)^2+y^2=1$ を C とする．点 P が C 上にあるとき x 軸に関して P と対称な点を Q とする．さらに，P を通り z 軸に平行な直線，および Q を通り z 軸に平行な直線が $z \geqq 0$ の部分で S と交わる点をそれぞれ P$'$，Q$'$ とする．点 P が原点 $(0,\ 0,\ 0)$ から点 $(2,\ 0,\ 0)$ まで C 上を半周するとき，長方形 PQQ$'$P$'$ が通過する部分の体積を求めよ．

〔 解答例 〕



$S : x^2+y^2+z^2=4$ ……①

$C : (x-1)^2+y^2=1,\ z=0$ ……②

点 P が C の $y \geqq 0$ にあるとしても一般性は保たれる．

平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ における長方形 PQQ$'$P$'$ が通過してできる立体の断面積を $S(t)$ とする．

断面は

$t=0$ のとき，原点 $(0,\ 0)$

$t=2$ のとき，1 点 $(2,\ 0)$

$0<t<2$ のとき，x 座標が t の長方形 PQQ$'$P$'$

である．

$0<t<2$ のとき

② で $x=t$ として　$(t-1)^2+y^2=1$　←点P は C 上!

$y^2=2t-t^2$　であるから　$y=\pm\sqrt{2t-t^2}$　←点P の y 座標

これより　$\mathrm{P}\left(t,\ \sqrt{2t-t^2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ -\sqrt{2t-t^2},\ 0\right)$

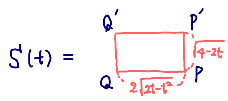
① で $x=t$，$y=\sqrt{2t-t^2}$　として

$$t^2+\left(\sqrt{2t-t^2}\right)^2+z^2=4$$　←点P′は S 上

$z^2=4-2t$　であり　$z \geqq 0$　なので　$z=\sqrt{4-2t}$　←点P′の z 座標

このことから　$\mathrm{P}'\left(t,\ \sqrt{2t-t^2}, \sqrt{4-2t}\ \right)$，$\mathrm{Q}'\left(t,\ -\sqrt{2t-t^2}, \sqrt{4-2t}\ \right)$

$$\begin{aligned}S(t) &= \mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PP}' \\ &= 2\sqrt{2t-t^2}\cdot\sqrt{4-2t} \\ &= 2\sqrt{t(2-t)}\cdot\sqrt{2(2-t)} \\ &= 2\sqrt{2}(2-t)\sqrt{t} = 2\sqrt{2}\left(2t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)\end{aligned}$$



求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= \int_0^2 S(t)\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^2\left(2t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt \\ &= 2\sqrt{2}\left[\ \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\ \right]_0^2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{5}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{64}{15}}\end{aligned}$$