実数 x，y，z が

$$x+y+z=1,\quad x+2y+3z=5$$

を満たすとする．

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ．

(2)　$z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ．

〔2017　阪大 文系 前期〕

〔解答例〕

(1)
$$\begin{cases} x+y+z=1 & \cdots\cdots① \\ x+2y+3z=5 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を満たすことから　　← x, y を z を用いて表す

②−① として　$y+2z=4$　$\therefore y=-2z+4$　$\cdots\cdots③$　　3変数を1変数にする！

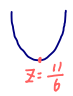
③ を ① へ代入して　$x-2z+4+z=1$　$\therefore x=z-3$　$\cdots\cdots④$

③，④ より　　← x, y を消して z だけに！

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (z-3)^3+(-2z+4)^3+z^3-3(z-3)(-2z+4)z \\ &= z^3-9z^2+27z-27-8z^3+48z^2-96z+64 \\ &\qquad +z^3+6z^3-30z^2+36z \\ &= 9z^2-33z+37 \\ &= 9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4} \end{aligned}$$

← z の2次関数

平方完成



よって z は実数であるから　$z=\dfrac{11}{6}$　のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$

(2)　$z \geqq 0$　のとき ③，④ より

$$\begin{aligned} xyz &= (z-3)(-2z+4)z \\ &= -2z^3+10z^2-12z \end{aligned}$$

← (1)と同じで x, y を消して z だけに

展開

$z \geqq 0$ とあるので z だけにするのがよい

ここで　$f(z)=-2z^3+10z^2-12z$　$(z \geqq 0)$

とおくと

$$f'(z)=-6z^2+20z-12=-2(3z^2-10z+6)$$

$f(z)=(z-3)(-2z+4)z$

より

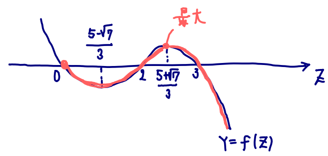
$f(z)=0$ とすると $z=0, 2, 3$

$f'(z)=0$　とすると　$z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

ここで　$f(0)=f(2)=0$　であることと　$\dfrac{5-\sqrt{7}}{3}<2<\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$　より

増減表は下のようになる．

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
$f'(z)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(z)$	0	↘		↗	0	↗	最大	↘



よって，最大となる z は　$\boldsymbol{\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}}$　　← 最大値は求めなくてもよい

〔 別解例 〕

(1)　(③, ④ を立式してから)

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \quad \leftarrow \text{公式} \\ &= x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \quad (\because ①) \\ &= x^2+y^2+z^2-xy-(x+y)z \\ &= (z-3)^2+(-2z+4)^2+z^2-(z-3)(-2z+4)-(1-z)z \\ &\qquad (\because ③,\ ④) \\ &= z^2-6z+9+4z^2-16z+16+z^2+2z^2-10z+12-z+z^2 \\ &= 9z^2-33z+37 \end{aligned}$$