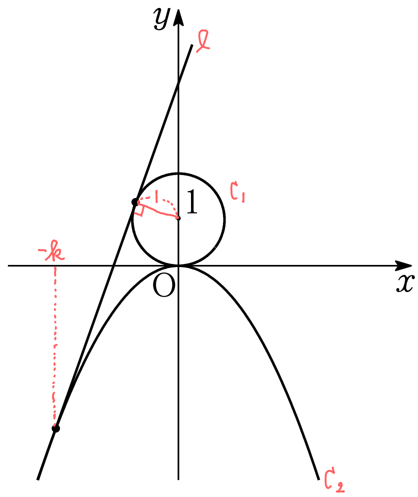
直線 $\ell : y = kx + m\ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　k と m を求めよ．

(2)　直線 ℓ と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

〔2015　阪大 文系 前期〕

〔解答例〕



(1)　ℓ と C_2 を連立して

$$-\frac{1}{2}x^2 = kx + m$$

すなわち　$x^2 + 2kx + 2m = 0$　……①

ℓ と C_2 が接するので ① は重解をもつ．

① の判別式を D として

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2m = 0 \qquad \therefore\ k^2 = 2m \quad \cdots\cdots②$$

このとき ① は $x = -k$ を重解にもつから

ℓ と C_2 は $x = -k$ で接している．

$\ell : kx - y + m = 0$

ℓ と C_1 が接するので，C_1 の中心 $(0,\ 1)$ と ℓ の距離が C_1 の半径 1 になるから

$$\frac{|-1+m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \quad \text{となり} \quad |m-1| = \sqrt{k^2+1}$$

両辺を 2 乗して　$m^2 - 2m + 1 = k^2 + 1$

② を代入して　$m^2 - 2m + 1 = 2m + 1$　すなわち　$m(m-4) = 0$

これより $m = 0,\ 4$

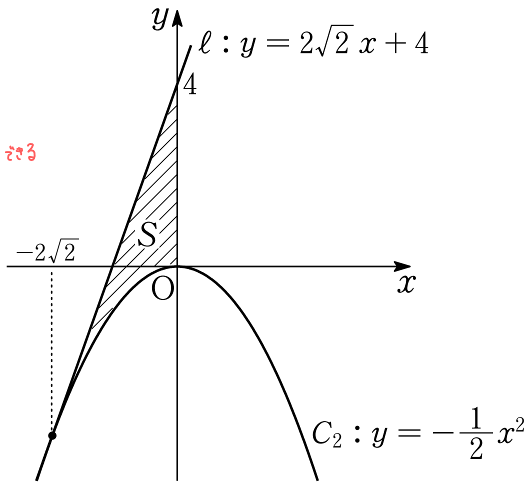
② から　$m = 0$ ならば $k = 0$，$m = 4$ ならば $k = \pm 2\sqrt{2}$

よって　$k > 0$ であるから　$\boldsymbol{k = 2\sqrt{2},\ m = 4}$

(2)　求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^{0} \left\{ 2\sqrt{2}\,x + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2 \right) \right\} dx \\ &= \int_{-2\sqrt{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{2} \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{6}\left(x + 2\sqrt{2} \right)^3 \right]_{-2\sqrt{2}}^{0} \\ &= \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} \right)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

← C_2 と ℓ は $x = -2\sqrt{2}$ で接するので因数分解できる



〔別解例〕（微分する）

(1)　C_2 上の点 $\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線の方程式は，$y' = -x$ より　← 微分でもよい

$$y = -t(x-t) - \frac{1}{2}t^2 \quad \text{すなわち} \quad y = -tx + \frac{1}{2}t^2$$

これが ℓ になるから　$k = -t$，$m = \dfrac{1}{2}t^2$

t を消去すると ② が導ける．

〔 別解例 〕(m を消去する)

(1)　② より $m=\dfrac{k^2}{2}$ ……②′

このとき，① は $x=-k$ を重解にもつから，

ℓ と C_2 は $x=-k$ で接している．

②′ を ℓ に代入して

$$\ell : y=kx+\frac{k^2}{2} \quad すなわち \quad 2kx-2y+k^2=0$$

ℓ と C_1 が接するので，C_1 の中心 $(0,\ 1)$ と ℓ の距離が C_1 の半径 1 になるから

$$\frac{|-2+k^2|}{\sqrt{4k^2+4}}=1 \quad となり \quad |k^2-2|=\sqrt{4k^2+4}$$

両辺 2 乗して $k^4-4k^2+4=4k^2+4$ すなわち $k^2(k+2\sqrt{2})(k-2\sqrt{2})=0$

$k>0$ であるから $\boldsymbol{k=2\sqrt{2}}$

②′ から $\boldsymbol{m=4}$