z 軸に接する球の xy 平面による切り口が，3 点 O(0, 0, 0)，A$(1, \sqrt{3}, 0)$，B(4, 0, 0) を頂点とする三角形の内接円である．この球の中心および半径を求めよ．

〔1982　阪大 文系〕

〔 解答例 〕

△OAB の内心を I，半径を r とする．

球の xy平面(z=0) による切り口は円

OA ＝ 2, OB ＝ 4，AB ＝ $2\sqrt{3}$ より　← $1:2:\sqrt{3}$

∠OAB ＝ 90°, ∠ AOB ＝ 60° とわかる．

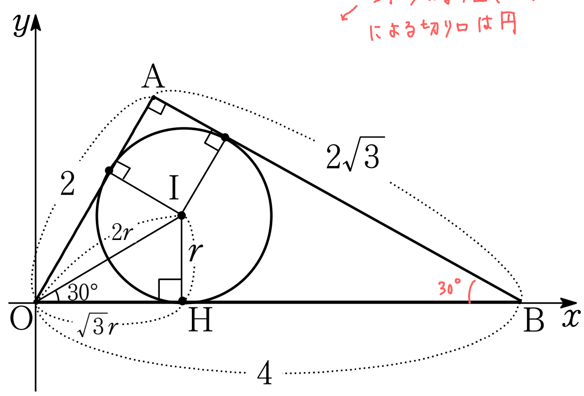
$$r = \frac{2\times(\triangle\text{OAB の面積})}{2+4+2\sqrt{3}}$$

$\frac{1}{2}$AB·OA

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \sqrt{3}-1$$



面積について

△OAB = △IOA + △IOB + △IAB

$= \frac{r}{2}(2+4+2\sqrt{3})$

内接円と辺 OB の接点を H とすると　IH ＝ r，∠IOH ＝ 30°　であるから

　　OH ＝ $\sqrt{3}\,r$

　　　∴ I $\left(\sqrt{3}\,r,\ r,\ 0\right)$

球の中心を P とおくと，PI ⊥ xy 平面　であるから

　　P$\left(\sqrt{3}\,r,\ r,\ c\right)$　……①

とおけて　PI ＝ $|c|$

P から z 軸へ垂線 PT を下ろすと T(0, 0, c)

球は z 軸と接するので

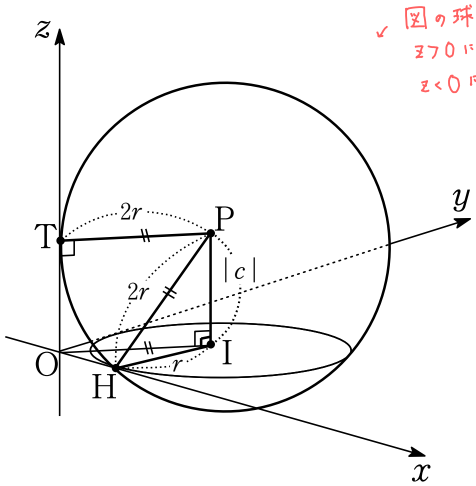
　　半径 TP ＝ OI ＝ $2r$　……②

これより　PH ＝ $2r$

△PIH に三平方の定理を用いて

$$c^2 = \text{PI}^2 = \text{PH}^2 - \text{IH}^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

$$\therefore c = \pm\sqrt{3}\,r$$



図の球の中心Pは z>0 にあるが z<0 にもあることに注意する

よって，①，② より，球の中心は $\left(\mathbf{3-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1,\ \pm(3-\sqrt{3})}\right)$，半径は $\mathbf{2\sqrt{3}-2}$

〔 補足 〕

OB ＝ OH ＋ HB　すなわち　$4 = 2 - r + 2\sqrt{3} - r$　　　$\therefore r = \sqrt{3}-1$

OBを2通りで表す

右図参