$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で表される曲線を C とおく．このとき，次の問に答えよ．

(1)　y を x の式で表せ．

(2)　x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ．

(3)　D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ．

〔2007　神大 理系 前期〕

〔解答例〕

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$0 \leqq \sin t \leqq 1$ であるから $0 \leqq x \leqq 1$

$\cos t \geqq 0$ であるから　$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

$$y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

よって　$\boldsymbol{y = 2x\sqrt{1 - x^2}\ (0 \leqq x \leqq 1)}$

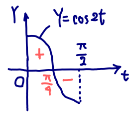
補 C のグラフの概形は

$$y = 2\sqrt{x^2(1 - x^2)} = 2\sqrt{-x^4 + x^2}$$
$$= 2\sqrt{-\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

よりわかる．念のため．媒介変数 t についての増減を調べると

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ において

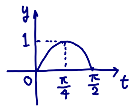
$$\frac{dx}{dt} = \cos t > 0$$
$$\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$



$\frac{dy}{dt}$ の符号については

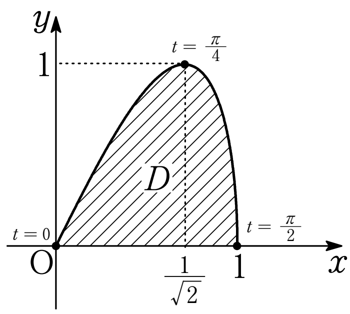
y=sin2t を直接考えても

わかる



$\dfrac{dy}{dt} = 0$　とすると　$2t = \dfrac{\pi}{2}$　つまり　$t = \dfrac{\pi}{4}$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		$+$		$+$	
x	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow$	1
$\frac{dy}{dt}$		$+$		$-$	
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0
(x, y)	$(0, 0)$	$\nearrow$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$	$\searrow$	$(1, 0)$



(2)　図形 D の面積を S とすると

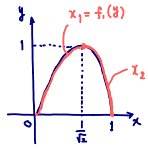
$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$y = 2x\sqrt{1-x^2}$ 2乗

(3)　(1) より $y^2 = 4x^2(1-x^2)$ すなわち $4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$ となるので

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4(1-y^2)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる x を x_1 とすると $x_1{}^2 = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{2}$



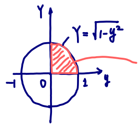
$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq 1$ となる x を x_2 とすると $x_2{}^2 = \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{2}$

外側の回転体から内積の回転体をひく

とし，求める体積を V とすると

$$V = \int_0^1 (\pi x_2{}^2 - \pi x_1{}^2)\,dy = \pi \int_0^1 \left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{2} - \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{2} \right) dy$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \pi \cdot \frac{\pi}{4}$$



$\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$
(半径1の四分円の面積)

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

〔別解例〕(置換積分を用いて，媒介変数 t で積分する)

(2)　求める面積を S とすると

$$S = \int_0^1 y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos^2 t\,dt$$

$$= \left[-\frac{2}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(3)　求める体積を V とすると

$$V = \pi\left(\int_0^1 x_2{}^2 dy - \int_0^1 x_1{}^2\,dy \right)$$

x^2 は t の関数とみると同じ式 (x_1^2, x_2^2)

$$= \pi\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt}\,dt \right)$$

$$= \pi\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \frac{dy}{dt} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} x^2 \frac{dy}{dt}\,dt \right)$$

1つの積分にできる!

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} x^2 \frac{dy}{dt}\,dt$$

積分区間を入れかえた　　$\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t \cdot 2\cos 2t\,dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot 2\cos 2t\,dt$$

$$= -\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos 2t - \cos^2 2t)\,dt = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2t - \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt$$

$\cos^2 2t = \dfrac{1+\cos 4t}{2}$

$$= -\pi \left[\frac{\sin 2t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\cos 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

(1) より
$V = 4\pi \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ になるので，$x = \sin t$ と置換することになる

別 (バームクーヘン積分)

$$V = \int_0^1 2\pi xy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi xy \frac{dx}{dt} dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \sin 2t \cos t\,dt$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \pi \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$