a を実数，$0 < a < 1$ とし，$f(x) = \log(1+x^2) - ax^2$ とする．以下の問に答えよ．
（1）　関数 $f(x)$ の極値を求めよ．
（2）　$f(1) = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

〔2022　神大 理系 前期〕

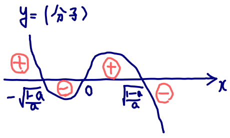
〔解答例〕

a は実数，$0 < a < 1$

$f(x) = \log(1+x^2) - ax^2 \ (0 < a < 1)$

対称性に気づく!!

任意の実数 x に対して　$f(-x) = f(x)$　が成り立つので $y = f(x)$ のグラフは y 軸対称である．



（1）　$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - 2ax = \dfrac{2x(-ax^2+1-a)}{1+x^2}$

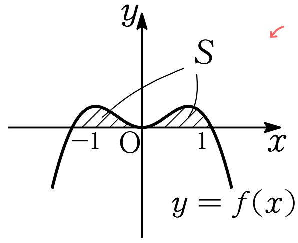
$$= \frac{-2ax\left(x+\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)\left(x-\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right)}{1+x^2} \quad \left(\frac{1-a}{a} > 0\right)$$

$0<a<1$ から

$f(x)$ の増減は下表のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$a-1-\log a$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a-1-\log a$	$\searrow$	

$f(x)$ の極値は　**極大値 $\boldsymbol{a-1-\log a}$，極小値 $\boldsymbol{0}$**



y軸対称なので $f(-1)=0$ も言える

（2）　$f(1) = 0$　より　$\log 2 - a = 0$　すなわち　$a = \log 2$

$y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \{\log(1+x^2) - ax^2\}\,dx$$

$$= 2\left\{\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx - \int_0^1 ax^2\,dx\right\}$$

$\dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2} = 2\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

せ　び

$$= 2\left\{\left[\, x\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx - \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^1\right\} \quad (\because \text{部分積分法})$$

$$= 2\left\{\log 2 - 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx - \frac{\log 2}{3}\right\} \quad (\because a = \log 2)$$

$$= 2\left\{\frac{2}{3}\log 2 - 2\Big[\, x\,\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right\}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ について　$x = \tan\theta$ とおいて　$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$，

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

よって　$S = 2\left(\dfrac{2}{3}\log 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}\log 2 - 4 + \pi}$