放物線 C：$y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(b,0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha, m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta, m\beta)$，原点を O とする．ただし，$a<b$，$m \neq 0$，$\alpha<\beta$ とする．線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ．

〔解答例〕

補 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$
(a, b, c は実数，$a \neq 0$)
が異なる2つの実数解 α, β ($\alpha<\beta$) をもつとき
$D=b^2-4ac$ (>0)
とし
$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}=\dfrac{2\sqrt{\frac{D}{4}}}{|a|}$
となることを利用してもよい

$y=-x^2+2x+1$ ……①

$y=mx$ ……②

① で $y=0$ とすると　$x^2-2x-1=0$　　$\therefore x=1\pm\sqrt{2}$

この 2 つの解が $x=a, b$ ($a<b$) なので　$b-a=2\sqrt{2}$ ……③

① = ② として　$x^2+(m-2)x-1=0$　　$\therefore x=\dfrac{-(m-2)\pm\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

この 2 つの解が $x=\alpha, \beta$ ($\alpha<\beta$) なので　$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}$ ……④

線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積を S

線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積を T

$m>0$ のとき，線分 OA と OQ と C で囲まれた図形の面積を U

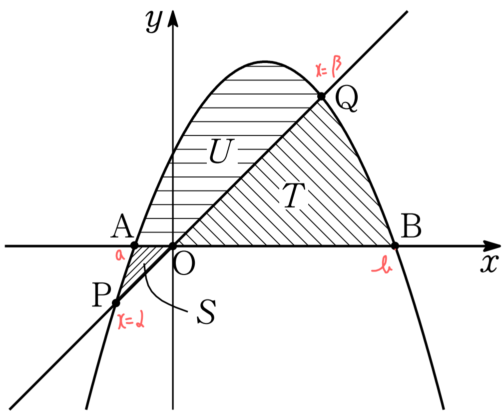
$m<0$ のとき，線分 OB と OP と C で囲まれた図形の面積を U

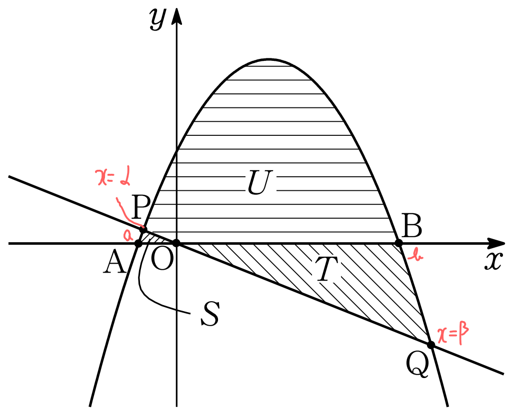
とすると

まともに立式して面積を求めるのは大変！
放物線と直線で囲まれる図形の面積は
公式で求まるので，U を考えるとよい

〔$m>0$ のとき〕　　〔$m<0$ のとき〕

← $m>0$, $m<0$ で 図が変わる





あ $m>0$ のとき

$$S+U=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x+1)-mx\}\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$T+U=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

い $m<0$ のとき

$$S+U=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$T+U=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x+1)-mx\}\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

あ，い のいずれの場合も $S=T$ となるのは　$\beta-\alpha=b-a$

③，④　より　$\sqrt{m^2-4m+8}=2\sqrt{2}$　すなわち　$m^2-4m=0$

よって　$m(m-4)=0$　かつ $m \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{m=4}$